بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة في نظرية الأعداد

الجزء الثاني

تأليـــف

جـــوزيف ســـيلفرمان

ترجمـــة

محمد مطاوع محمد خشان

قسم الرياضيات – كلية المعلمين

جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

هذه ترجمة عربية مصرح بها من مركز الترجمة بالجامعة لكتاب :

A Friendly Introduction to Number Theory, Third Edition
Published in the United States by New Jersey 07458
By : Joseph H. Silverman

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سيلفرمان، جوزيف

مقدمة في نظرية الأعداد /جوزيف سيلفرمان ؛ محمد مطاوع محمد خشان

– الرياض، ١٤٣٤هـ

٢مج

٣٧١ ص، ١٧ × ٢٤سم

ردمك : ٠ – ١٩٧ – ٥٠٧ – ٦٠٣–٩٧٨ (مجموعة)

ردمك: ٤ – ٢٠١ – ٥٠٧ – ٦٠٣–٩٧٨ (ج٢)

١- نظرية الأعداد أ. خشان، محمد مطاوع محمد (مترجم) ب- العنوان

ديوي ٥١٢,٧ ١٤٣٤/١٠٣٩٠

رقم الإيداع ١٤٣٤/١٠٣٩٠

ردمك : ٠ – ١٩٧ –٥٠٧ – ٦٠٣–٩٧٨ (مجموعة)

ردمك : ٤ – ٢٠١ – ٥٠٧ – ٦٠٣–٩٧٨ (ج٢)

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة ، وقد وافق المجلس على نشره بعد اطلاعه على تقارير المحكمين في اجتماعه العشرين للعام الدراسي ١٤٣٤/١٤٣٣هـ المعقود في تاريخ ١٤٣٤/٧/٣٠هـ الموافق ٩ /٦/ ٢٠١٣م.

يعتذر النشر العلمي عن عدم وضوح بعض الرموز والأشكال لهذا الكتاب لعدم وضوحها من الأصل

النشر العلمي والمطابع ١٤٣٥هـ

إهداء

إلى معلمي الأول أمي

إلى رفيق العمر زوجتي

إلى قرة العين أولادي:

زينة　　سمر　　عمار　　مطاوع

مقدمة المترجم

لقد بدأ الإنسان بالتعرف على العدد من خلال مفهوم ملموس فرضته عليه بيئته واحتياجاته ، ثم ساقه الفضول والنزعة للمعرفة إلى أن يُجرّد هذا المفهوم ، ويلاحظ خصائص الأعداد ، ويصنفها إلى أنواع ، فكل نوع يجمع بين أعداده خصائص مشتركة ، ثم ما لبث أن بدأ باكتشاف أنماط ، وعلاقات تربط بين أعداد كل نوع وأعداد النوع الآخر. وفي الحقيقة ، فإن دراسة هذه العلاقات هي جوهر دراسة نظرية الأعداد ، كما سترى ذلك لاحقاً خلال قراءتك لصفحات هذا الكتاب. لهذا يمكننا القول إن التفاعل الأول بين الإنسان والرياضيات كان من خلال العدد ، فلقد لعب العدد دور حلقة الوصل بين البشرية وعالم الرياضيات. إن هذا يجعل لنظرية الأعداد مكانة مرموقة بين كل أفرع الرياضيات الأخرى ، ويعطيها دوراً ريادياً تستحقه. ويُمْكننا أن نتخيل من ذلك مقدار ما قدّم هذا العلم للعلوم الرياضية الأخرى ، ولا أدل على ذلك من تعبير أمير الرياضيات **كارل فريدريك جاوس** حين قال : "الرياضيات مَلِكة العلوم ، ونظرية الأعداد تاج على رأس هذه الملكة". وبالرغم من أن جاوس كان يحب جميع أفرع الرياضيات ، إلا أنه كان يفضل دائماً العمل في نظرية الأعداد. وبالطبع ، لم يقتصر ذلك على جاوس ، فلا يكاد عَلَم من أعلام الرياضيات إلا واشتغل في نظرية الأعداد وله إسهامات فيها ، ومنهم على سبيل المثال لا الحصر ، **فيرما** ، **أويلر** ، **لجندر**.

إن نظرية الأعداد من العلوم الأصيلة التي تتفاعل بشكل مستمر مع أفرع الرياضيات الأخرى، مؤثرة فيها ومتأثرة بها. وستجد في صفحات الكتاب الكثير الكثير من أدوات الجبر، الهندسة، التحليل، والتفاضل والتكامل التي تساعدنا في برهنة بعض النظريات أو في تطوير بعض الطرق والإجراءات لحل بعض المشكلات. وقد يَظُن من لم يسبق له دراسة نظرية الأعداد أن دراسة هذا الفرع هي دراسة رياضية نظرية بحته، وأنها بعيدة كل البعد عن واقع التطبيق، وأقول لمن ظن ذلك، اقرأ الفصل الثامن عشر الذي يُحَدثك عن الأعداد الأولية الضخمة التي يصعب تحليلها، وكيف أدى هذا إلى إنشاء شيفرات سرية لا يمكن فكها. كما أن نظرية الأعداد أرض خصبة جداً للبحث العلمي، فهي تحوي على الكثير من التخمينات والمسائل المفتوحة التي تنتظر من لديه الجلد والشجاعة لبرهنتها أو حلها. وأفضل مثال على ما نقول هو ما تضمنته صفحات هذا الكتاب التي تحكي قصة نظرية فيرما الأخيرة، وكيف أن هذه النظرية ظلت ما يزيد عن ثلاثمائة وخمسين سنة دون برهان حتى قام الرياضي الإنجليزي "**أندرو ويلز**" ببرهانها عام ١٩٩٤ بعد أن كرّس ست سنوات من حياته ليحقق هذا الإنجاز الرائع.

من معرفتي بما سبق، فقد أحببت أن أقترب من نظرية الأعداد بعمل أخدم فيه من أراد دراسة هذا العلم العظيم، عملاً أرجو الله فيه أن يجعله في ميزان حسناتي، فلم أجد أفضل من تقديم كتاب رائع، من خلال ترجمة أمينة لكتاب له الكثير مما يميزه. فهو مكتوب للمبتدئين، حيث اعتبر المؤلف أن القارئ ليس لديه خلفية رياضية قوية، فلم يترك شيئاً للوضوح التلقائي بل قام بتوضيح الواضح. وفي نفس الوقت، شمَل الكتاب على موضوعات متعددة لا تتضمنها الكثير من كتب نظرية الأعداد، وعُرضت بأسلوب سلس متتالٍ متراكم مترابط، يدل على خبرة طويلة وعلم راسخ وحرفية عالية واحترافية نادرة، ناهيك عن زخم وشمولية التمارين الموضوعة في نهاية كل

فصل، والتي لم يغفل الكاتب فيها عن وضع عبارات مساعدة تعتبر كمفاتيح للحل. كذلك ضَمّن التمارين مساحة واسعة لاستخدام الكمبيوتر في دراسة نظرية الأعداد، وهذا مهم جداً في كثير من الأحيان. إن ذلك يجعل من هذا الكتاب بيئة مناسبة للمبتدئ ولمن أراد أن يستزيد من نظرية الأعداد على حد سواء.

أعزائي القراء، لن أطيل عليكم في وصف هذا الكتاب، ليكمل عني هذه المهمة مؤلفه **جوزيف سيلفرمان**، من خلال مقدمته التي يصف فيها محتوى الكتاب، ويقترح فيها خطة لدراسة فصوله، كما يوضح أن موضوعات هذا الكتاب تكفي لدراسة مقررين جامعيين أو أكثر في نظرية الأعداد.

"رحم الله امرأً أهدى إلي عيوبي". كم أتطلع بشوق واعتزاز لإبداء ملاحظاتك أخي القارئ على هذا الكتاب المترجم على بريدي الإلكتروني drmohammedr@yahoo.com، من ملاحظات على الترجمة، ملاحظات عن أخطاء مطبعية، ملاحظات متعلقة بالتنسيق، أو أي ملاحظات أخرى مهما كانت بسيطة، نصل من خلالها إلى تطوير هذا الكتاب، وتعميده كمرجع رياضي عربي يُعتمد عليه، ووضعه في مصاف الكتب التي تفتخر مكتبتنا العربية بانتمائه إليها. "إن الله يحب إذا عمل أحدكم عملاً أن يتقنه".

المترجم

الرياض، الإثنين ١٠-١٠-٢٠١٢م

الموافق ٢٤-١١-١٤٣٣هـ

مقدمة الكتــاب

مـع مـرور الوقـت لم نعـد نعـرف علـى وجـه الدقـة كيـف نشـأت الأعـداد الطبيعيـة $1,2,3,4,5,6,\ldots$. ولا نعلـم مـن هـو أول مـن أدرك أن هنـاك مفهومـاً محـدداً عـن "الثلاثية"، كثلاثة صخور، ثلاثة نجوم، وثلاثـة أشـخاص. لقـد كانـت الأعـداد ملهمـة وساحرة ومستخدمة من بدايات التاريخ، وبالطبع لم يكن المفهوم المجرد للأعداد نفسها هو الذي يثير الاهتمام. إن المثير للاهتمام هـو طبيعـة العلاقـات الـتي تظهـر بـين الأعـداد أحدها مع الآخر. وفي كثير من الأحيان يجد المرء الجمال في عمق هذه العلاقات ودقتهـا. وهنـا يصـف أحـد مشـاهير فلاسـفة القـرن العشـرين الرياضـيات فيقـول " الرياضـيات ، وبنظرة واقعية صحيحة، لا تمتلـك الحقيقـة فقـط، وإنمـا تمتلـك أعلـى مراتـب الجمـال، جمالاً بارداً قاسياً كجمال فن النحت، فناً لا يتماشى مع ضعفنا الطبيعي، فناً يخلو مـن زخارف الرسومات ومحسنات الموسيقى، فناً لا يـزال نقيـاً رفيعـاً كامـل الإتقـان كـأعظم فن يمكنك أن تراه ". (بيرتراند راسل Bertrand Russel، 1902).

إن نظرية الأعداد هي ذلك الجزء مـن الرياضـيات الـذي يهـدف إلى اكتشـاف العديد من العلاقات العميقة والدقيقة التي تربط بين أنواع مختلفة مـن الأعـداد. وكمثـال بسـيط، نـرى أن كـثيراً مـن النـاس في مختلـف العصـور مهتمـون بالأعـداد المربعـة $1,4,9,16,25,\ldots$. إذا قمنا بتجربة جمع عددين مربعين، سنجد أحياناً أننا نحصل علـى عدد مربع آخر. أكثر الأمثلة شهرة على هذه الظاهرة هو :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ولكن هناك أمثلة كثيرة أخرى، مثل :

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \quad , \quad 20^2 + 21^2 = 29^2 \quad , \quad 28^2 + 45^2 = 53^2$$

الثلاثيات مثل $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(20,21,29)$, $(28,45,53)$ تسمى ثلاثيات فيثاغورية[1]. بناءاً على هذه التجربة، فإن أي شخص لديه فضول في طرح عدة أسئلة، مثل :

" هل هناك عدد لا نهائي من الثلاثيات الفيثاغورية؟ " و " إذا كان هناك عدد لا نهائي منها، فهل يمكننا إيجاد صيغة تصف جميع هذه الثلاثيات؟ " هذه النوعية من الأسئلة تُعالج من خلال نظرية الأعداد.

كمثال آخر، لنعتبر مسألة إيجاد الباقي عندما نقسم العدد الضخم :

$$32478543^{743921429837645}$$

على العدد 54817263. إحدى طرق حل هذه المسألة هي : خذ العدد 32478543، واضربه في نفسه 743921429837645 مرة، ثم استخدم القسمة الطويلة لتقسم الناتج على 54817263، وبعد ذلك نأخذ الباقي. من ناحية تطبيقية، فإن ذلك سيستغرق وقتاً أطول بكثير من عُمْر من سينفذ هذه الطريقة، حتى وإن استخدام أسرع أجهزة الكمبيوتر. نظرية الأعداد تزودنا بطرق لحل مثل هذه المسائل أيضاً. " انتظر دقيقة "، إني أسمعك تقول، " الثلاثيات الفيثاغورية فيها من الأناقة ما يُدخل السرور إلى العين، ولكن أين الجمال في القسمة الطويلة والبواقي؟ ". الجواب هو أن الجمال ليس في البواقي نفسها ولكن في كيفية استخدام هذه البواقي. لقد بين الرياضيون كيف أن حل مسألة الباقي البسيطة هذه (وعكسها) يقود إلى خلق شيفرات بسيطة غاية في السرية لا تقدر حتى

(١) للإنصاف، يجب الإشارة هنا إلى أن البابليين عملوا جداول كبيرة للثلاثيات " الفيثاغورية " قبل ولادة فيثاغورس بعدة قرون.

وكالـة الأمـن القـومي[1] علـى فكهـا. لـذلك حملـت ملاحظـة G. H. Hardy تنبـؤاً خاطئـاً تماماً عندما قال " لم يكتشف أحد بعد أي هدف عسكري يمكن أن تخدمه نظرية الأعداد، ويبدو أن أحداً لن يتمكن من ذلك لسنوات عديدة ".

إن أرض نظرية الأعداد مليئة بالكائنات الغريبة المتنوعة. فهناك الأعداد المربعة والأعداد الأولية، والأعداد الفردية والأعداد الكاملة (لكن ليس هناك أعداد مربعة — أولية أو أعداد كاملة – فردية). وهناك معادلات فيرما Fermat و معادلات بِلْ Pell، الثلاثيات الفيثاغورية والمنحنيات الناقصية، أرانب فيبوناتشي Fibonacci ، الشيفرات غير القابلة للفك، والكثير الكثير.

سوف تقابل كل هذه الكائنات ، وكائنات أخرى كثيرة، خلال رحلتنا في نظرية الأعداد.

دليل المُعلم

هذا الكتاب مُعَدٌّ ليستخدم كمقرر لفصل دراسي واحد أو سنة جامعية كاملة لدراسة نظرية الأعداد أو للدراسة المستقلة. إن هذا الكتاب يضم موضوعات غنية تكفي تقريباً لفصلين دراسيين؛ لذلك فالذي يُدرس هذا المقرر لفصل دراسي واحد سيكون عنده بعض المرونة في اختيار الموضوعات التي سيُدرسها. الفصول الأحد عشر الأولى هي فصول أساسية، وربما سيرغب معظم المدرسين بالاستمرار حتى نظام التعمية RSA الوارد في الفصل الثامن عشر؛ لأنه حسب خبرتي فإن هذا الموضوع من أكثر الموضوعات التي يُفَضِلُها الطلاب.

---

(١) وكالة الأمن القومي (NSA) هي ذراع لحكومة الولايات المتحدة تهتم بجمع البيانات، عمل الشيفرات، وفك الشيفرات. إن ميزانية الـ NSA أكبر من ميزانية الـ CIA، وهي أكبر مؤسسة لتوظيف علماء الرياضيات في العالم.

هناك الآن عدة طرق للمضي قُدُماً. هنا بعض التصورات التي تبدو مناسبة لفصل دراسي واحد، لكن تصرف بحرية في تجزيء الفصول الأخيرة حتى تتلاءم مع رغبتك.

الفصول 1 – 20

الجذور البدائية Primitive roots، التعاكس التربيعي Quadratic reciprocity، مجاميع مربعات Sums of squares، معادلة بَلْ Pell's equation، والتقريب الديوفانتيني Diophantine approximation. (أضف الفصلين 39 و 40 عن الكسور المستمرة Continued fractions إذا أسعفك الوقت).

الفصول 1 – 28 و 43 – 48

معادلة فيرما للأس 4 (Fermat equation for exponent 4)، معادلة بَلْ، التقريب الديوفانتيني، المنحنيات الناقصية Elliptic curves، ونظرية فيرما الأخيرة Fermat's last theorem.

الفصول 1 – 29 و 37 – 40

معادلة بَلْ، التقريب الديوفانتيني، أعداد جاوس الصحيحة Gaussian integers، الأعداد المتسامية Transcendental numbers، معاملات ذو الحدين Binomial coefficients، الصيغ الارجاعية الخطية Linear recurrences، والكسور المستمرة.

الفصول 1 – 19 و 25 – 36

اختبار الأولية Primality test، الجذور البدائية، التعاكس التربيعي، معاملات ذو الحدين، الصيغ الإرجاعية الخطية. رمز O الكبيرة Big-Oh notation (هذا المحتوى مصمم بشكل خاص للطلاب الذين يريدون متابعة الدراسة في علم الكمبيوتر أو التشفير).

وفي جميع الحالات، من الأفضل أن يقرأ الطلاب بعض الفصول التي لم نوردها، وأن يقوموا بحل التمارين.

معظم التمارين غير العددية والتي ليس لها علاقة بالبرمجة، الواردة في هذا الكتاب، صممت لإثراء المناقشة والتجربة. وليس من الضروري الإجابة عنها بشكل "صحيح " أو " كامل ". سيجد معظم الطلبة هذه التمارين صعبة في البداية؛ لذلك يجب أن تمتاز الدراسة بالجدية. يمكنك جعل طلابك يشعرون أن المادة أسهل من خلال جعل أسئلتك تبدأ بعبارة مثل " أخبرني بقدر ما تستطيع عن ...". أبلغ طلابك أن جمع البيانات وحل حالات خاصة ليست مجرد طريقة مقبولة وإنما ضرورية. من جهة أخرى، أخبرهم أنه لا يوجد شيء اسمه حل كامل؛ لأن حل مسألة جيدة دائماً ما يطرح أسئلة جديدة، لذلك إذا كانوا يستطيعون إعطاء إجابة كاملة عن سؤال ما، فإن هدفهم القادم هو البحث عن تعميمات وقيود هذه الحلول.

إن التفاضل والتكامل مطلوب فقط في الفصلين 38 (رمز O الكبيرة) و 41 (توليد الدوال Generating functions). إذا لم يكن الطلاب قد درسوا التفاضل والتكامل فمن الممكن حذف هذين الفصلين دون أن يؤثر ذلك على تسلسل المادة.

إن نظرية الأعداد ليست سهلة، ولهذا لا توجد طريقة لإقناع الطلاب بذلك. لكن بدلاً من ذلك، فإن هذا الكتاب سيبين لطلابك أنهم راضون تمام الرضى عن طريقتهم في التفكير الاستكشافي. إن مكافأتك كمدرس هي أنك تنير لهم طريقهم وتوجه مساعيهم ومجهوداتهم.

الحواسيب، نظرية الأعداد، وهذا الكتاب

هنا أرغب في قول بعض الكلمات عن استخدام الحواسيب (الكمبيوترات) في هذا الكتاب. أنا لا أتوقع ولا أطلب من القارئ استخدام برامج كمبيوتر ذات مستوى عالٍ مثل Maple ، Mathematica ، PART أو Derive ، وإن معظم التمارين (ما عدا

المشار لها) يمكن الإجابة عنها باستخدام آلة حاسبة بسيطة. لا شك أن الكمبيوترات تمكننا من التعامل مع أعداد كبيرة، لكن هدفنا الأساسي دائماً هو استيعاب المفاهيم والعلاقات. لذلك إذا كان لي أن أُصدر حكماً بقبول أو رفض استخدام أجهزة الكمبيوتر، فلا شك أنني سأمنع استخدامها.

على كل حال، كأي قاعدة جيدة، فإن لها شواذ. أولاً، أن إحدى أفضل الطرق لفهم موضوع معين هي شرحها لشخص آخر؛ لذا إذا كنت تعرف القليل عن كيفية كتابة برامج الكمبيوتر، فسوف تجد أنه من المفيد للغاية أن تشرح للكمبيوتر كيف ينجز الخوارزميات الموصوفة في هذا الكتاب. بتعبير آخر، لا تعتمد على برامج الكمبيوتر الجاهزة، بل اعمل البرنامج بنفسك. أفضل الموضوعات لتنفيذ هذا الأسلوب هي الخوارزمية الإقليدية Euclidean algorithm (الفصلين 5,6)، نظام التعمية RSA (الفصول 18 - 16)، التعاكس التربيعي (الفصل 25)، كتابة الأعداد كمجموع مربعين (الفصلين 26,27)، اختبار الأولية (الفصل 19)، وتوليد نقاط نسبية على منحنيات ناقصية (الفصل 43).

الاستثناء الثاني لقاعدة " لا للكمبيوتر " هو توليد البيانات. الاكتشاف في نظرية الأعداد دائماً ما يعتمد على التجربة، والتي قد تستلزم فحص رزمة من البيانات لاكتشاف أنماط.

إن الكمبيوترات مفيدة جداً في توليد مثل هذه البيانات، وأيضاً تساعد أحياناً في البحث عن أنماط؛ لذلك أنا لا أعارض استخدامها لخدمة هذه الأهداف.

لقد ضَمَّنت التمارين بعدد من التمارين الحاسوبية والمشاريع الحاسوبية لتشجيعك على استخدام الكمبيوتر كأداة لمساعدتك على الفهم ولتبحث في نظرية الأعداد. بعض هذه التمارين يمكن تنفيذها على كمبيوتر صغير (أو حتى على حاسبة قابلة للبرمجة)، بينما الأخرى تتطلب أجهزة متطورة و/أو لغات برمجة.

بالنسبة للكثير من البرامج ، لم أقم بإعطاء صياغة دقيقة لها ، حيث إن جزءاً من البرنامج هو ماذا يجب على المستخدم أن يقوم بإدخاله بالضبط وما هو الشكل الذي يجب أن يأخذه الناتج بالضبط. لاحظ أن برنامج الكمبيوتر الجيد يجب أن يتضمن الميزات التالية :

- مكتوب بشكل واضح يشرح ماذا يعمل البرنامج ، كيفية استخدامه ، ما هي مدخلاته ، وما هي مخرجاته.
- تعليقات داخلية شاملة تشرح طبيعة عمل البرنامج.
- معالجة الخطأ بشكل كامل مع وجود رسائل معلوماتية عن الخطأ.

على سبيل المثال ، إذا كان $a = b = 0$ ، فإن $\gcd(a,b)$ يجب أن يُعطي رسالة الخطأ " $\gcd(0,0)$ is undefined " ($\gcd(0,0)$ غير مُعَرَّف) بدلاً من أن يَدْخُل البرنامج في حلقة لا نهائية (infinite loop) ، أو يُعطي رسالة الخطأ (division by zero) (قسمة على صفر).

عندما تقوم بكتابة برامجك الخاصة ، حاول أن تجعلها سهلة ومتعددة الاستخدام قدر الإمكان ؛ لأنك سترغب في نهاية المطاف بربط القطع مع بعضها لتشكيل مجموعتك الخاصة بنظرية الأعداد الروتينية.

إن المغزى هو أن الكمبيوتر مفيد كأداة للتجربة ، ويمكنك أن تتعلم الكثير بتدريس الكمبيوتر كيف يُنجز حسابات نظرية الأعداد ، ولكن عندما تكون قد تعلمت واستوعبت الموضوع أولاً ، بينما البرمجيات الجاهزة ما هي إلا مجرد عُكَّاز يمنعك من أن تتعلم المشي بمفردك.

جوزيف سيلفرمان

المحتويات

Contents

إهداء ....هـ

مقدمة المترجم ....ز

مقدمة الكتاب .... ك

الجــــزء الأول

الفصل الأول: ما هي نظرية الأعداد؟ ١

الفصل الثاني: الثلاثيات الفيثاغورية...١١

الفصل الثالث: الثلاثيات الفيثاغورية ودائرة الوحدة..............................٢٣

الفصل الرابع: مجموع قوى عليا ونظرية فيرما الأخيرة...........................٢٩

الفصل الخامس: قابلية القسمة والقاسم المشترك الأكبر..........................٣٥

الفصل السادس: المعادلات الخطية والقاسم المشترك الأكبر.......................٤٧

الفصل السابع: التحليل والنظرية الأساسية في الحساب ٦١

الفصل الثامن: التطابقات ٧٥

الفصل التاسع: التطابقات، القوى، ونظرية فيرما الصغرى ٨٥

الفصل العاشر: التطابقات، القوى، وصيغة أويلر.............................. ٩٥
الفصل الحادي عشر: دالة فاي لأويلر ونظرية الباقي الصينية ١٠٣
الفصل الثاني عشر: الأعداد الأولية ١١٧
الفصل الثالث عشر: عــد الأعداد الأولية ١٢٩
الفصل الرابع عشر: أعداد ميرسن الأولية.................................... ١٤١
الفصل الخامس عشر: أعداد ميرسن الأولية والأعداد الكاملة.................. ١٤٩
الفصل السادس عشر: القوى قياس m والتربيعات المتعاقبة..................... ١٦٧
الفصل السابع عشر: حساب الجذور النونية $\left(K^{th}\right)$ قياس m ١٧٧
الفصل الثامن عشر: القوى، الجذور، والشيفرات "غير القابلة للفك" ١٨٥
الفصل التاسع عشر: اختبار الأولية وأعداد كارمايكل ١٩٧
الفصل العشرون: دالة فاي لأويلر ومجموع القواسم ٢١٥
الفصل الواحد والعشرون: القوى قياس p والجذور البدائية ٢٢٣
الفصل الثاني والعشرون: الجذور البدائية والأدلة............................. ٢٤١
الفصل الثالث والعشرون: الأعداد المربعة قياس p ٢٥٣
الفصل الرابع والعشرون: هل $1-$ مربع قياس p ؟ هل 2 ؟................. ٢٦٧
الفصل الخامس والعشرون: التعاكس التربيعي.................................. ٢٨٧
الفصل السادس والعشرون: أي الأعداد الأولية تساوي مجموع مربعين؟........ ٣٠٧
الفصل السابع والعشرون: أي الأعداد تساوي مجموع مربعين؟.................. ٣٢٧
الفصل الثامن والعشرون: المعادلة $X^4+Y^4=Z^4$ ٣٣٧

الجــزء الثــاني

الفصل التاسع والعشرون: الأعداد المربعة – المثلثية ٣٤٣
الفصل الثلاثون: معادلة بَلْ ٣٥٧
الفصل الواحد والثلاثون: التقريب الديوفانتيني ٣٦٥
الفصل الثاني والثلاثون: تقريب ديوفانتين ومعادلة بَلْ ٣٧٩
الفصل الثالث والثلاثون: نظرية الأعداد والأعداد التخيلية ٣٩١
الفصل الرابع والثلاثون: أعداد جاوس الصحيحة والتحليل الوحيد............ ٤١٣
الفصل الخامس والثلاثون: الأعداد غير النسبية والأعداد المتسامية.............. ٤٣٩
الفصل السادس والثلاثون: معاملات ذي الحدين ومثلث باسكال ٤٦٥
الفصل السابع والثلاثون: أرانب فيبوناتشي والمتتاليات الخطية الارجاعية ٤٨١
الفصل الثامن والثلاثون: أوو ، كم هي جميلة هذه الدالة ٥٠١
الفصل التاسع والثلاثون: العالم المقلوب للكسور المستمرة...................... ٥٢١
الفصل الأربعون: الكسور المستمرة، الجذور التربيعية، ومعادلة بَلْ.............. ٥٤٣
الفصل الواحد الأربعون: توليد الدوال ٥٦٧
الفصل الثاني والأربعون: مجاميع القوى.. ٥٨٣
الفصل الثالث والأربعون: المنحنيات التكعيبية والمنحنيات الناقصية ٦٠١
الفصل الرابع والأربعون: منحنيات ناقصية بقليل من النقاط النسبية ٦٢١
الفصل الخامس والأربعون: نقاط على منحنيات ناقصية قياس p ٦٣٣
الفصل السادس والأربعون: مجموعات الالتواء قياس p والأعداد الأولية الرديئة.. ٦٥١
الفصل السابع والأربعون: حدود الانحراف وأنماط المعيارية ٦٥٩

الفصل الثامن والأربعون: المنحنيات الناقصية ونظرية فيرما الأخيرة............ ٦٦٩
ملحق (أ): تحليل أعداد مؤلفة صغيرة.................................. ٦٧٣
ملحق (ب): قائمة لأعداد أولية ٦٧٥
قراءات إضافية ٦٧٧
ثبت المصطلحات ٦٧٩
أولاً: عربي – إنجليزي ٦٧٩
ثانياً: إنجليزي – عربي... ٦٩٣
كشاف الموضوعات ٧٠٧