بسم الله الرحمن الرحيم

الأسس الرياضية للبرمجة الخطية

تأليف

أ. د . سليمان صالح الحميدان
عميد كلية العلوم – جامعة الملك فهد للبترول والمعادن

د. عمر بن محمد حامد
قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة الملك سعود

د. حسن بن محي الدين حميدة
قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة الملك سعود

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS
ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

ح دار جامعة الملك سعود للنشر ، ١٤٣٨هـ (٢٠١٧م)

الطبعة الأولى ، ١٤٢١هـ (٢٠٠٠م)

الطبعة الثانية ، ١٤٣٨هـ (٢٠١٧م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

الحميدان، سليمان

الأسس الرياضية للبرمجة الخطية/ سليمان الحميدان ؛ عمر محمد حامد؛ حسن محي الدين حميدة - ط٢- الرياض ، ١٤٣٨هـ

٢٩١ص؛ ١٧×٢٤سم

ردمك: ٣-٥٥٠-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

١- البرمجة الخطية ٢- البرمجة (رياضيات) أ. حامد ، عمر محمد (مؤلف مشارك) ب. حميدة ، حسن محي الدين (مؤلف مشارك) ج. العنوان

ديوي ٥١٩,٧٢ ١٤٣٨/٢٨٩٢

رقم الإيداع: ١٤٣٨/٢٨٩٢

ردمك: ٣-٥٥٠-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

نشر هذا الكتاب بناء على موافقة المجلس العلمي في اجتماعه الرابع للعام الدراسي ١٤٣٤/ ١٤٣٥هـ المعقود بتاريخ ٩/ ٥/ ١٤٣٥هـ الموافق ١٠/ ٣/ ٢٠١٤م، بعد استيفائه شروط التحكيم العلمي بالجامعة.

جميع حقوق النشر محفوظة. لا يسمح بإعادة نشر أي جزء من الكتاب بأي شكل وبأي وسيلة سواء كانت إلكترونية أو آلية بما في ذلك التصوير والتسجيل أو الإدخال في أي نظام حفظ معلومات أو استعادتها بدون الحصول على موافقة كتابية من دار جامعة الملك سعود للنشر

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS

مقدمة الطبعة الثانية

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على رسوله الأمين وبعد.

إنه من دواعي السرور أن تبدي جامعة الملك سعود اهتماما كبيرا في نشر كتب متخصصة باللغة العربية؛ فالشكر الجزيل لجامعة الملك سعود وللقائمين على إداراتها لهذه الخطوة المباركة التي نرجو أن تعطي، بعون الله، ثمارها سريعا فيترسخ التدريس باللغة العربية وتكون فاتحة خير للتقدم العلمي.

لاتزال المكتبة العربية شبه خالية من كتاب في البرمجة الخطية وتطبيقاتها. لقد كان هدف هذا الكتاب إبراز جمال الجبر الخطي واظهار قيمته العلمية والتطرق إلى بعض تطبيقاته العديدة. الكتاب لم يخرج عن كونه، وفقاً لعنوانه، أسسا رياضية للبرمجة الخطية. إن الروح لم تتغير ولهذا السبب فإننا لم نعير اهتماما للبرمجة المحدبة أو البرمجة التربيعية أو البرمجة غير الخطية أو البرمجة الديناميكية أو مسائل الأمثلية المعقدة أو طرائق الذكاء الاصطناعي. لقد توسعنا قليلاً في توضيح أسلوب التعامل مع البرمجة الصحيحة، وكذلك عرضنا مثالا لشرح طريقة كارماركر ووجهنا القارئ إلى مراجع

مستفيضة في دراسة الأنواع المختلفة من البرمجة مثل كتاب [3] (Nonlinear Programming) Bazaraa وكتاب [5](Operation Research) .Taha

كنا نتمنى أن ندرج نظرية اللعب ضمن تطبيقات البرمجة الخطية وخصوصاً أن هذه النظرية أخذت في السنوات الأخيرة أهمية كبيرة؛ نظراً لأن العديد من مسائل الاقتصاد صيغت على أنها مسائل تابعة لنظرية اللعب. كذلك كنا نود أن نظهر الارتباط الوثيق بين ثلاثة مواضيع في الرياضيات: مسائل الأمثلية ومسائل التقريب وأخيرا المعادلات التفاضلية. إن هذه العلاقة الوثيقة بين هذه المواضيع تتيح الفرصة للاستفادة من النتائج المعروفة في أحد هذه المواضيع في معالجة المواضيع الأخرى. لعل هذه الأمنيات تتحقق يوماً، إلا أنك إذا نظرت إلى الطبعة السابقة فإنك ستجد تغيراً قد حصل، فهناك سلسلة كاملة من التحسينات والتصويبات والإضافات قد تمت. ويعود الفضل في ذلك إلى توجيهات المحكمين الأفاضل. كما أننا قد وضعنا طلابنا الأعزاء أمام أعيننا أثناء إجراء هذه التعديلات، إليهم جميعاً نتوجه بالشكر والعرفان.

نأمل من الله أن نكون قد أدينا الأمانة على خير وجه.

المؤلفون

مقدمة الطبعة الأولى

Introduction

تختص البرمجة الخطية بإيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة خطيةٍ ذات n متغير حقيقي بحيث تخضع هذه المتغيرات إلى شروط خطيه على شكل متباينات أو معادلات.

والبرمجة الخطّية فرع حديث من فروع الرياضيات كانت بدايته الحقيقية عام ١٩٤٧م عندما تمكن Dantzig من إيجاد طريقة عمليه لحل مسألة البرمجة الخطية عرفت باسم طريقه السمبلكس. وقد لاقت هذه الطريقة نجاحا باهرا وحظيت باهتمام شديد وفتحت الباب أمام العديد من التطبيقات الاقتصادية والعسكرية. وأخذ التفاعل بين الدراسات النظرية والمسائل التطبيقية يتزايد بشكل يندر وجوده في فرع آخر من فروع الرياضيات. ومازالت البرمجة الخطية في مراحل التطور المستمرة. ففي السنوات القليلة الماضية ظهر اهتمام متزايد لإيجاد طرائق بديلةٍ عن طريقة السمبلكس، فظهرت طريقة مجسم القطع الناقص عام ١٩٧٩م التي تعتبر ذات أهمية رياضية كبيرة إلا أنها لم تحظ من الناحية العملية بنجاح كبير.

وهناك أيضا طريقة المجموعة الفعالة Active set method وهي مكافئة لطريقة السمبلكس مع وجود متغيرات إضافية. بالإضافة إلى طُرق تعتمد على فك المصفوفات وقد اقترحت للتحكم في الخطاء بشكل أكثر فعالية. في هذا البحث ستكون الدراسة فقط على طريقة السمبلكس.

أما تطبيقات البرمجة الخطية فهي عديدة ومهمة، فشركات البترول تهتم بمزج أصناف مختلفة من البترول الخام بنسب معينة، كي تضاعف أرباحها، ويهتم المهندس الزراعي بتخطيط الأرض الزراعية لتأتي له بالربح الأوفر.

يسعى المختصون بالتحليل العددي للحصول على تقريب أمثل للدوال المتصلة. ولرجال الاقتصاد اهتمامات عديدة في البرمجة الخطية، وقد منحت جائزة نوبل في الاقتصاد عام ١٩٧٥م لعالمين استخدما البرمجة الخطية وسيلة للتطبيق في هذا المجال.

إلا أن البرمجة الخطية ليست مجرد وسيله مهمة للتطبيقات، ولكنها كذلك دراسة رياضية للمتباينات الخطية. وطريقة السمبلكس التي أبدعهاDantzig لا تنحصر أهميتها في كونها وسيلة لحل مسائل البرمجة الخطية لكنها مهيأة كذلك لدراسة مواضيع مهمة لها صلة بالبرمجة الخطية مثل موضوع الثنائية وموضوع حساسية الحلول تجاه تغيرات المعطيات.

إن موضوع البرمجة الخطية عادة يعرض في صياغة اقتصادية أو هندسيه دون التعرض للخلفية الرياضية الأساسية والتي سنسعى لتوضيحها في هذا الكتاب.

إن من أهم استخدامات الحاسب الآلي هو حل المشاكل الرياضية التي كان من الصعب حلها لولا وجود الحاسب الآلي، وسوف نقوم باستخدام برنامج

الماتلاب MATLAB في حل ورسم البرامج الخطية التي سوف ندرسها في هذا الكتاب، وسنشرح في ملحق الكتاب برنامج الماتلاب وكيفية استخدامه في حل البرامج الخطية، وذلك في ملحق (أ). وأما في الملحق (ب) فسوف نسرد بعض البرامج الأساسية التي تساعدنا في حل البرنامج الخطي. وفي ملحق (ج) نذكر بعض من أوامر الماتلاب.

وأخيراً، فإن هذا الكتاب صمم لكي يدرس في السنوات الأخيرة من الدراسة الجامعية، وخلال فصل دراسي واحد. إلا أنه صالح للتدريس في بداية المرحلة الجامعية، وكذلك للقارئ المستقل الذي لديه معلومات أساسية في مبادئ الرياضيات. كما أن هذا الكتاب يُعد مدخلاً إلى مواضيع أكثر تقدماً في الأمثلة، مثل البرمجة غير الخطية ونظرية التحكم وغيرها.

وفي الختام ندعو الله العزيز الكريم أن نكون قد وفقنا بعملنا هذا الذي نأمل أن ينفع الله به ويجعل لنا فيه ثواباً من عنده. وإن كان هناك نقص أو قصور وهذا من طبيعة عمل البشر فإننا نسأل الباري عز وجل عفوه ومغفرته فالكمال لله وحده.

والله الموفق

المؤلفون

المحتويات

مقدمة الطبعة الثانية ..... هـ

مقدمة الطبعة الأولى ..... ز

الفصل الأول : البرمجة الرياضية ١

(١ , ١) مقدمة ١

(١ , ٢) البرمجة الخطية ٤

(١ , ٣) البرمجة الخطية الصحيحة ٤

(١ , ٤) البرمجة غير الخطية ٥

(١ , ٥) البرمجة الديناميكية ٦

الفصل الثاني : البرمجة الخطية ٧

(٢ , ١) مقدمة ٧

(٢ , ٢) بعض نماذج البرمجة الخطية ٨

(٢ , ٢ , ١) النموذج الأول (المسألة التغذية) ٩

(٢ , ٢ , ٢) النموذج الثاني (مسألة الإنتاج) ١١

(٢ , ٢ , ٣) النموذج الثالث (مسألة النقل) ١٢

(٢ , ٢ , ٤)النموذج الرابع (المسألة التوظيف) ١٣

(٥ , ٢ , ٢) نظرية اللعب ١٥
تمارين الباب الثاني ١٦
الفصل الثالث : هندسة وجبر البرمجة الخطية والصياغة القياسية ٢٣
(١ , ٣) مقدمة ٢٣
(٢ , ٣) المجموعات المحدبة ٢٣
(٣ , ٣) المستوى الفوقي ونصف الفضاء ٢٤
(٤ , ٣)المخروطات المحدبة ٢٦
(٥ , ٣) المنطقة المضلعة ٢٧
(٦ , ٣) النقاط الحدية ٢٨
(٧ , ٣) الحل الهندسي ٣٠
(٨ , ٣) نظرة تمهيدية جبرية للبرنامج الخطي وطريقة السمبلكس ٣٦
(٩ , ٣) الصياغة القياسية للبرنامج الخطي ٤٢
(١٠ , ٣) الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي ٤٤
تمارين الباب الثالث ٤٦
الفصل الرابع : طريقه السمبلكس ٥١
(١ , ٤) مقدمة ٥١
(٢ , ٤) مفاهيم أساسية ٥٢
(٣ , ٤) خوارزمية السمبلكس ٦٧
(٤ , ٤) حالات خاصة ٨٩
(١ , ٤ , ٤) عدم وحدانية الحل ٨٩

(٢ , ٤ , ٤) دالة الهدف غير محدودة ٩٢
(٣ , ٤ , ٤) حالة الحل غير المنتظم..... ٩٥
(٤ , ٤ , ٤) حالة الدوران ١٠١
قاعدة بلاند ١٠٢
(٥ , ٤) طريقة المرحلتين..... ١٠٤
(٦ , ٤) خوارزمية السمبلكس المحسنة ١١٥
(٧ , ٤) طريقة كارماركر ١٢٤
تمارين الباب الرابع..... ١٢٥
الفصل الخامس : الثنائية والحساسية ١٣٥
(١ , ٥) مقدمه حول الثنائية..... ١٣٥
(٢ , ٥) النظرية الأساسية في الثنائية ١٤٢
(٥ , ٢ , ٥)نظرية متمّمة المكملة الضعيفة..... ١٤٦
(٧ , ٢ , ٥) نظرية لاجرانج..... ١٥١
(٣ , ٥) تحليل الحساسية ١٥٦
(١ , ٣ , ٥) تغير في معاملات دالة الهدف..... ١٥٧
(٢ , ٣ , ٥) تغير في الطرف الأيمن للشروط..... ١٦٥
(٣ , ٣ , ٥) إضافة متغير جديد ١٧٠
(٤ , ٣ , ٥) تغير في مصفوفة المعاملات..... ١٧٦
تمارين الباب الخامس ١٨١
الفصل السادس : حل بعض البرامج الخطية الخاصة..... ١٩٣

(٦,١) مقدمة ١٩٣
(٦,٢) مسألة النقل..... ١٩٣
(٦,٢,١) خصائص المصفوفة **A** ١٩٦
(٦,٢,٢) شرط الحل الصحيح..... ٢٠١
(٦,٢,٣) ثنائية مشكلة النقل ٢٠٢
(٦,٢,٤) طريقة السمبلكس لمشكلات النقل ٢٠٢
خوارزمية الركن الشمالي-الغربي ٢٠٣
خوارزمية إجراء التعديلات على المتجه الداخل للأساس ٢٠٩
(٦,٣)مسألة التعيين..... ٢١٧
(٦,٣,١) ثنائية مسألة التعيين ٢٢٠
(٦,٣,٥)الخوارزمية الهنغارية ٢٢٣
(٦,٤) تحليل الشبكات..... ٢٢٥
(٦,٤,١) مقدمة..... ٢٢٥
(٦,٤,٢) الصيغة الرياضية لمسألة التدفق الأعظم ٢٣١
(٦,٤,٣) خوارزمية حساب التدفق الأعظمي ٢٣٢
(٦,٤,٤) عدم وحدانية التدفق الأعظم ٢٣٢
(٦,٤,٥) المسارات وأنواعها في الشبكات ٢٣٣
(٦,٤,٦) خوارزمية العنونة ٢٣٨
(٦,٤,٧) نظرية التدفق الأعظمي-القاطع الأصغر ٢٤٥
تمارين الباب السادس ٢٤٩

الملاحق **٢٥٣**

ملحق (أ) : الحاسوب والبرمجة الخطية ٢٥٣

ملحق (ب) : نصوص بعض البرامج ٢٥٦

ملحق (ج) : استخدام ماتلاب ٢٦٣

المراجع **٢٦٩**

ثبت المصطلحات **٢٧١**

أولاً : عربي – إنجليزي ٢٧١

ثانياً : إنجليزي – عربي ٢٧٩

كشاف الموضوعات **٢٨٧**