بسم الله الرحمن الرحيم

تطبيقات في
حساب التفاضل والتكامل

تأليف

د. إبراهيم ديب سرميني

الجمعية السعودية للعلوم الرياضية

جامعة الملك سعود

د. سلمان بن عبدالرحمن السلمان

قسم الرياضيات – كلية العلوم

جامعة الملك سعود

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

ح دار جامعة الملك سعود للنشر، ١٤٤٠هـ (٢٠١٨م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سرميني، إبراهيم ديب

تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل./ إبراهيم ديب سرميني؛ سلمان عبدالرحمن السلمان.- الرياض، ١٤٣٩هـ

٥٣٨ ص؛ ١٧سم × ٢٤سم

ردمك: ٦-٦٣٢-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

١- التفاضل والتكامل أ. السلمان، سلمان عبدالرحمن (مؤلف مشارك)

ب. العنوان

ديوي ٥١٥ ١٤٣٩/٥٥٠٦

رقم الإيداع: ١٤٣٩/٥٥٠٦

ردمك: ٦-٦٣٢-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

نشر هذا الكتاب بناءً على موافقة المجلس العلمي في اجتماعه السادس عشر للعام الدراسي ١٤٣٧/١٤٣٨هـ المعقود بتاريخ ١٤٣٨/٨/٥هـ الموافق ٢٠١٧/٥/١م، بعد استيفائه شروط التحكيم العلمي بالجامعة.

جميع حقوق النشر محفوظة. لا يسمح بإعادة نشر أي جزء من الكتاب بأي شكل وبأي وسيلة سواء كانت إلكترونية أو آلية بما في ذلك التصوير والتسجيل أو الإدخال في أي نظام حفظ معلومات أو استعادتها بدون الحصول على موافقة كتابية من دار جامعة الملك سعود للنشر.

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS

المقدمـة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبينا محمد الأمين الذي أرسل هداية للعالمين.
لقد حث الإسلام على القراءة والتعلم فكان أول ما أنزل على رسولنا محمد (صلى الله عليه وسلم) قوله تعالى : ﴿ ٱقۡرَأۡ بِٱسۡمِ رَبِّكَ ٱلَّذِي خَلَقَ ۝١ ﴾، وقد حث الرسول عليه الصلاة والسلام على طلب العلم ورغب فيه بقوله :" من سلك طريقا يلتمس فيه علما سهل الله له طريقا إلى الجنة" ، فانطلاقا من هذا المبدأ الذي نؤمن به وندعو إليه غيرنا قمنا بتأليف كتابنا هذا الذي أسميناه تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل ويتكون الكتاب من الفصول التالية:

الفصل الأول: المستقيمات والنسب المثلثية للزوايا.
الفصل الثاني: المتباينات.
الفصل الثالث: الدوال الحقيقية.
الفصل الرابع: النهايات.
الفصل الخامس: الاتصال.
الفصل السادس: المشتقات.
الفصل السابع: خواص الدوال القابلة للاشتقاق.
الفصل الثامن: رسم المنحنيات.
الفصل التاسع: التطبيقات.
الفصل العاشر: الدوال الأسية واللوغارتمية – التكامل.
الفصل الحادي عشر: القطوع المخروطية.
الفصل الثاني عشر: الدوال في عدة متغيرات.
الفصل الثالث عشر: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى .

الفصل الرابع عشر: المعادلات الوسيطية والإحداثيات القطبية.

الفصل الخامس عشر: الدوال الزائدية.

الفصل السادس عشر: قاعدة لوبيتال.

الفصل السابع عشر: التكاملات المعتلة.

الفصل الثامن عشر: تطبيقات في حساب التكامل باستخدام الإحداثيات الوسيطية والقطبية

ملحق: جداول الصيغ الرياضية – تمارين عامة- نماذج اختبارات.

ثبت المصطلحات: (عربي- إنجليزي) و(إنجليزي- عربي).

مراجع الكتاب

ومن أهم سمات هذا الكتاب ما يلي:

١-يتضمن ما يربو على مائتين وتسعة وثمانين (٢٨٩) مثال محلول، وأغلب هذه الأمثلة مكون من عدة فقرات.

٢-يتضمن ما يزيد على ألف ومئة وستة عشر (١١١٦) تمرين (أو مسألة لفظية) ومعظم هذه التمارين يتكون من عدة فقرات.

٣-يتضمن سبعة (٧) نماذج من نماذج الاختبارات النهائية مع الإجابات لجميع الأسئلة الموضوعية (الاختيارية).

٤-يتضمن الكتاب مسائل لفظية كثيرة ومتنوعة (بعضها محلول على هيئة أمثلة) تخدم تخصصات متعددة كالفيزياء والهندسة والكيمياء وعلم النبات، فضلا عن الرياضيات التطبيقية.

٥-كتبت فصول الكتاب بصورة متسلسلة وبطريقة تجعل مادة الكتاب مستقلة بنفسها مما يريح القارئ من عناء الرجوع إلى ما سبق أن درسه فيما قبل الجامعة.

٦-يساعد الطالب غير المتخصص في الرياضيات لكون مادة الكتاب قدمت بشكل مبسط دون اللجوء للتعمق في النظريات الرياضية.

٧-يساعد الطالب المتخصص بالرياضيات لكون مادة الكتاب تعطيه موجزاً متكاملا لأهم ما تجب معرفته لطالب الرياضيات في السنة الأولى من الدراسة الجامعية أو ما يعادلها من كليات أو معاهد أخرى.

٨-يشمل الكتاب في طبعته الرابعة جميع مفردات بل محتويات أكثر من مقرر في الرياضيات في جامعة الملك سعود.

٩-إن الزيادة المضافة في الطبعة الرابعة تزيد عن سابقتها بنسبة ٥٦٪.

ولعله من المفيد أن نشير إلى أن مادة هذا الكتاب ظهرت بهذه الصورة بعد تدريسها لمرات عديدة من قبل عدة أساتذة أفاضل بقسم الرياضيات في جامعة الملك سعود فلهم منا جزيل الشكر والامتنان على ما أسدوه لنا من ملحوظات قيمة ترفع من قيمة الكتاب .

ونحن إذ نقدم هذا الكتاب للقارئ العربي سواء كان أستاذا أم طالبا فلنا أمل ورجاء في إهداء ما يستطيع أن يهديه لنا من ملحوظات بناءة تصب في خدمة تحسين الكتاب ليخدم أمتنا العربية وليكون إضافة طيبة للمكتبة العربية وله من الله الجزاء الأوفى. نسأل الله العون والتوفيق لما يحبه ويرضاه وأن يجعل عملنا هذا في موازين أعمالنا، إنه سميع مجيب.

المؤلفان

المحتويات
CONTENTS

المقدمة ..... هـ
المحتويات ..... ط
الفصل الأول: المستقيمات والدوال المثلثية ١
(١ , ١) المستقيمات في المستوي ١
(١ , ٢) الدائرة ١١
(١ , ٣) النسب المثلثية لزوايا حادة في مثلث قائم ١٢
(١ , ٤) التقدير الدائري للزوايا ١٥
(١ , ٥) طول قوس دائرة. مساحة قطاع دائري ١٦
(١ , ٦) النسب المثلثية لزاوية في الحالة العامة ١٧
(١ , ٧) حل المعادلات المثلثية ٢١
(١ , ٨) حل المعادلات من الدرجة الثانية ٢٥
تمارين (١ , ١) ٢٩
الفصل الثاني: المتباينات ٣٣
(٢ , ١) الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية IR ٣٣
(٢ , ٢) بعض المجموعات المستخدمة في هذا الكتاب ٣٤
(٢ , ٣) القيمة المطلقة ٣٤
(٢ , ٤) حل المتباينات ٣٥

تمارين (١ , ٢) ٤٨

الفصل الثالث: الدوال الحقيقية ٥١
(١ , ٣) الدالة الحقيقية ٥١
(٢ , ٣) الدوال الزوجية والفردية والدورية ٥٦
(٣ , ٣) التناظر في المستوي ٥٧
(٤ , ٣) انسحاب منحني باتجاه أحد المحورين الإحداثيين ٥٩
(٥ , ٣) رسم بعض أنواع الدوال ٦٠
(٦ , ٣) الدوال العكسية ٦٤
(٧ , ٣) تركيب (دالة التركيب) ٦٨
تمارين (١ , ٣) ٧٢

الفصل الرابع: النهايات ٧٥
(١ , ٤) نهاية دالة ٧٥
(٢ , ٤) النهاية عن يمين والنهاية عن يسار ٨٢
(٣ , ٤) أوضاع عدم التعيين ٨٥
(٤ , ٤) نظرية الشطيرة أو نظرية الساندويتش ٩١
(٥ , ٤) النهايات المثلثية ٩٢
تمارين (١ , ٤) ١٠٠

الفصل الخامس: الاتصال ١٠٥
(١ , ٥) اتصال دالة ١٠٥
(٢ , ٥) الاتصال عن يمين والاتصال عن يسار ١٠٨
(٣ , ٥) خواص الدوال المتصلة ١١٠
تمارين (١ , ٥) ١١٣

الفصل السادس: المشتقات ١١٧
(٦,١) المعنى الهندسي للمشتقة ١١٧
(٦,٢) تعريف المشتقة ١١٨
(٦,٣) مشتقة دالة عند نقطة ١١٩
(٦,٤) مشتقات الدوال الجبرية ١٢١
(٦,٥) مشتقات الدوال المثلثية ١٢٩
(٦,٦) قاعدة السلسلة ١٣٢
(٦,٧) الاشتقاق الضمني ١٣٤
(٦,٨) المشتقات من مراتب عليا ١٣٨
(٦,٩) الدوال المثلثية العكسية ١٤٠
(٦,١٠) التقريب الخطي ١٥١
(٦,١١) طريقة نيوتن لإيجاد الجذور التقريبية للدوال ١٥٥
تمارين (٦,١) ١٥٧

الفصل السابع: خواص الدوال القابلة للاشتقاق ١٦٣
(٧,١) القيم القصوى للدوال ١٦٣
(٧,٢) النظرية الأساسية للاتصال ١٦٧
تمارين (٧,١) ١٦٩
(٧,٣) نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة ١٧٠
تمارين (٧,٢) ١٧٤
(٧,٤) اختبار المشتقة الأولى ١٧٦
(٧,٥) التقعر والتحدب ١٧٩
تمارين (٧,٣) ١٨٥

الفصل الثامن: رسم المنحنيات ١٨٧
(٨,١) المستقيمات المقاربة الأفقية والعمودية ١٨٧

(٨,٢) رسم المنحنيات ١٩١
تمارين (٨,١) ٢١٤

الفصل التاسع: التطبيقات ٢١٧
(٩,١) معدلات التغير ٢١٧
(٩,٢) الأمثلية ٢٢٩
تمارين (٩,١) ٢٤٠

الفصل العاشر: الدوال الأسية واللوغاريتمية.التكامل ٢٤٣
(١٠,١) الدوال الأسية واللوغاريتمية ٢٤٣
(١٠,٢) التكامل غير المحدد ٢٥٣
(١٠,٣) التكامل بالتعويض ٢٥٨
(١٠,٤) التكامل بالتجزيء ٢٦١
(١٠,٥) التكامل المحدد ٢٦٥
تمارين (١٠,١) ٢٧٣
(١٠,٦) تكامل حاصل ضرب نسبتين مثلثيتين ٢٧٧
(١٠,٧) التكاملات المثلثية من الشكل $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ٢٧٨
(١٠,٨) التكاملات المثلثية من الشكل $\int \tan^m x \sec^n x dx$ ٢٨٠
تمارين (١٠,٢) ٢٨٦
(١٠,٩) التعويضات المثلثية ٢٨٧
تمارين (١٠,٣) ٢٩٤
(١٠,١٠) تكامل الدوال الكسرية باستخدام الكسور الجزئية ٢٩٦
(١٠,١١) التكاملات من الشكل: $\int f(\sin x, \cos x, \tan x)\, dx$ ٣٠٤
تمارين (١٠,٤) ٣٠٦

(١٠ , ١٢) التكاملات من الشكل: $\int f\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\ldots\right]dx$ ٣٠٨
(١٠ , ١٣) التكاملات من الشكل: $\int f(e^{ax})dx$ ٣١٠
تمارين (١٠ , ٥) ٣١١
(١٠ , ١٤) حساب المساحات باستخدام الإحداثيات الديكارتية ٣١٢
تمارين (١٠ , ٦) ٣١٨
(١٠ , ١٥) طول قوس منحن معرف بمعادلته الديكارتية ٣١٩
تمارين (١٠ , ٧) ٣٢١
(١٠ , ١٦) الحجوم الدورانية بطريقة الأقراص الدائرية ٣٢٢
(١٠ , ١٧) حساب الحجوم بطريقة الشرائح الأسطوانية ٣٢٨
تمارين (١٠ , ٨) ٣٣١
(١٠ , ١٨) مساحة سطح دوراني ٣٣٢
تمارين (١٠ , ٩) ٣٣٤
(١٠ , ١٩) أمثلة عامة ٣٣٦

الفصل الحادي عشر: القطوع المخروطية ٣٤٥
(١١ , ١) القطع المكافئ ٣٤٥
(١١ , ٢) القطع الناقص ٣٥١
(١١ , ٣) القطع الزائد ٣٥٦
تمارين (١١ , ١) ٣٦٣
(١١ , ٤) الأشكال المختلفة للقطوع المخروطية في حالتها الإنسحابية ٣٦٤
تمارين (١١ , ٢) ٣٧٥

الفصل الثاني عشر: الدوال في عدة متغيرات ٣٧٧
(١٢ , ١) الدوال بمتغيرين أو أكثر ٣٧٧
(١٢ , ٢) تحديد نقطة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد ٣٧٩

(٣, ١٢) النهايات والاتصال ٣٨١
(٤, ١٢) المشتقات الجزئية ٣٨٤
تمارين(١, ١٢) ٣٩١
(٥, ١٢) قاعدة السلسلة ٢٩٢
تمارين (٢, ١٢) ٣٩٤
(٦, ١٢) الدوال الضمنية ٣٩٥
تمارين (٣, ١٢) ٣٩٩

الفصل الثالث عشر: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ٤٠١
(١, ١٣) المعادلات التفاضلية القابلة للفصل ٤٠٢
(٢, ١٣) المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ٤٠٣
تمارين (١, ١٣) ٤٠٦

الفصل الرابع عشر: المعادلات الوسيطية والإحداثيات القطبية ٤٠٧
(١, ١٤) المنحنيات القطبية ٤٠٧
(٢, ١٤) المنحنيات الوسيطية ٤٢٠
تمارين (١, ١٤) ٤٢٦

الفصل الخامس عشر: الدوال الزائدية ٤٢٩
(١, ١٥) الدوال الزائدية ٤٢٩
تمارين (١, ١٥) ٤٣٦
(٢, ١٥) الدوال الزائدية العكسية ٤٣٨
تمارين (٢, ١٥) ٤٤٧

الفصل السادس عشر: قاعدة لوبيتال ٤٤٩
(١, ١٦) صيغ عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ٤٤٩

(١٦,٢) صيغ عدم التعيين من الشكل $\infty-\infty$ أو $0\times\infty$ ٤٥٠
(١٦,٣) صيغ عدم التعيين من الشكل 0^0 ، 1^∞، ∞^0 ..... ٤٥٢
تمارين (١٦,١) ٤٥٥

الفصل السابع عشر: التكاملات المعتلة ٤٥٧
(١٧,١) فترة التكامل محدودة ٤٥٧
(١٧,٢) فترة التكامل غير محدودة ٤٦١
تمارين (١٧,١) ٤٦٤

الفصل الثامن عشر: تطبيقات في حساب التكامل باستخدام الإحداثيات الوسيطية والقطبية . ٤٦٧
(١٨,١) المساحات ٤٦٧
تمارين (١٨,١) ٤٧٢
(١٨,٢) طول قوس ٤٧٤
تمارين (١٨,٢) ٤٨٠
(١٨,٣) الحجوم الدورانية ٤٨١
تمارين (١٨,٣) ٤٨٥
(١٨,٤) السطوح الدورانية ٤٨٥
تمارين (١٨,٤) ٤٨٩

الملاحق: نماذج اختبارات ٤٩١
-النموذج الأول: اختبار نهائي ٤٩١
-النموذج الثاني: اختبار نهائي ٤٩٤
-النموذج الثالث: اختبار نهائي ٤٩٧
-النموذج الرابع: الاختبار النهائي للفصل الأول ٥٠٠
-النموذج الخامس: الاختبار النهائي للفصل الثاني ٥٠٣
-النموذج السادس: اختبار نهائي ٥٠٦

-النموذج السابع: اختبار نهائي ٥٠٩
إجابات نماذج الاختبارات ٥١٢
ملحق: جداول للصيغ الرياضية ٥١٣
تمارين عامة ٥١٨
المراجـــع ٥٢٣
ثبت المصطلحات ٥٢٥
أولاً: عربي . إنجليزي ٥٢٥
ثانياً: إنجليزي . عربي ٥٢٩
كشاف الموضوعات ٥٣٥