بسم الله الرحمن الرحيم

استعراض تاريخ الرياضيات

ثقافة رياضية من خلال

حل المسائل

تأليف

Steven G. Krantz

ترجمة

أ.د. فوزي بن أحمد صالح الذكير أ.د. معروف عبدالرحمن سمحان

قسم الرياضيات- كلية العلوم

جامعة الملك سعود

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

ح دار جامعة الملك سعود للنشر، ١٤٤٣هـ (٢٠٢١م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

كرانتز، استفين ج.

استعراض تاريخ الرياضيات: ثقافة رياضية من خلال حل المسائل ./ استيفن ج. كرانتز؛ فوزي بن أحمد الذكير؛ معروف عبدالرحمن سمحان.– الرياض، ١٤٤٢هـ

٦١١ ص؛ ١٧ × ٢٤ سم

ردمك: ١ – ٩٣٤– ٥٠٧ – ٦٠٣ – ٩٧٨

١– الرياضيات أ. الذكير، فوزي بن أحمد (مترجم) ب. سمحان، معروف عبدالرحمن (مترجم) ج. العنوان

ديوي ٥١٠ ١٤٤٢/٦٤٠٤

رقم الإيداع: ١٤٤٢/٦٤٠٤

ردمك: ١ – ٩٣٤– ٥٠٧ – ٦٠٣ – ٩٧٨

هذه ترجمة عربية محكمة صادرة عن مركز الترجمة بالجامعة لكتاب:

An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture Through Problem Solving
By: Steven G. Krantz
© 2017 Tylor & Francis
وقد وافق المجلس العلمي على نشرها في اجتماعه الثالث للعام الدراسي ١٤٤٠/١٤٤١هـ المنعقد بتاريخ ١/٢/١٤٤١هـ الموافق ٣٠/٩/٢٠١٩م.

جميع حقوق النشر محفوظة. لا يسمح بإعادة نشر أي جزء من الكتاب بأي شكل وبأي وسيلة سواء كانت إلكترونية أو آلية بما في ذلك التصوير والتسجيل أو الإدخال في أي نظام حفظ معلومات أو استعادتها بدون الحصول على موافقة كتابية من دار جامعة الملك سعود للنشر.

دار جامعة الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS

مقدمة المترجمان

لا يستطيع أحد إنكار أهمية الترجمة والدور الذي تلعبه في نقل العلوم والثقافات بين الشعوب المختلفة ولكن ما أهمية ترجمة كتاب عن تاريخ الرياضيات؟ سننقل هنا ما كتبه أستاذ الرياضيات المتقاعد من جامعة أوكسفورد والرئيس السابق لجمعية الرياضيات البريطانية البروفيسور روبن ويلسون:

"كما للرسم والموسيقى والأدب تاريخ قديم فإن للرياضيات تاريخاً أيضاً. في الحقيقة، تاريخ الرياضيات يسبق تاريخ هذه الموضوعات لأن أول كتابة وُجِدت كانت كتابة الأعداد. اشتركت عدة حضارات في إنشاء الرياضيات مثل الحضارة اليونانية والإفريقية والشرق أوسطية والآسيوية. ربما سيزداد اهتمام تلاميذ المدارس بالرياضيات إذا تم تدريسها من وجهة نظر تاريخية. على سبيل المثال، كم عدد التلاميذ الذين يتعلمون أن البابليين هم أول من اكتشف حلاً لمعادلات الدرجة الثانية قبل 4000 سنة وكانوا يقطنون الدولة التي تُعرَف الآن بالعراق؟"

لقد اخترنا ترجمة هذا الكتاب من بين المؤلفات العديدة المتوفرة التي تعالج موضوع تاريخ الرياضيات لعدد من الأسباب من بينها:

- مع أن الكتاب لا يدخل في التفاصيل التاريخية للمواضيع المقدمة كما في معظم كتب تاريخ الرياضيات إلاّ أنه أسهل بتحقيق الغرض الذي وُضِع من أجله ومن ثم فهو أفضل لتدريس الموضوع.
- اختار المؤلف حقباً زمنية ومواضيع مهمة لتوضيح مدى ارتباط الرياضيات في الدول الغربية مع رياضيات الحضارات السابقة كالحضارة العربية واليونانية.
- يحتوي الكتاب على أمثلة ومسائل ومشاريع منتقاة بعناية فائقة وهذا يرجع إلى الخبرة الطويلة التي يمتلكها المؤلف.

- هذا الكتاب الرائع هو بالضبط ما يدل عليه عنوانه وهو تدريس الرياضيات من خلال التاريخ وحل المسائل.
- يستطيع معلمو المدارس الاستفادة والتعلم من هذا الكتاب.
- المادة العلمية المقدمة في هذا الكتاب سهلة الفهم وتتناول مواضيع عديدة.

أثناء ترجمتنا لهذا الكتاب قمنا بتصحيح بعض الأخطاء المطبعية والعلمية التي تَمَكنّا من اكتشافها والتي لا يكاد يخلو منها أي كتاب. اعتمدنا في ترجمة المصطلحات العلمية على قاموس العلوم الرياضية الذي شارك المترجمان في إعداده والصادر عن منشورات جامعة الملك سعود وهذا القاموس بُنِيَ على المعجمين الصادرين عن مكتب تنسيق التعريب بالرباط ومعجم الرياضيات الصادر عن مؤسسة الكويت للتقدم العلمي، واجتهدنا في ترجمة المصطلحات التي لم تَرِد في أي من هذه المعاجم الثلاثة.

وأخيراً نود أن نشكر مركز الترجمة بجامعة الملك سعود على موافقته على ترجمة هذا الكتاب الذي نأمل أن يكون إضافة مفيدة إلى المكتبة العربية. والله من وراء القصد.

المترجمان

إهداء المؤلف

إلى أستاذي ومُلهِمي

Marvin J. Greenberg

نبذة عن المؤلفيَن

وُلِد ستيفن ج. كرانتز في مدينة سان فرانسيسكو في ولاية كاليفورنيا عام 1951. نال شهادة البكالوريوس من جامعة كاليفورنيا في سانتا كروز عام 1971 ثم حصل على شهادة الدكتوراه من جامعة برينستون عام 1974.

عمل كرانتز أستاذاً جامعياً في جامعة كاليفورنيا فرع لوس أنجلوس وجامعة بِنْ الحكومية وجامعة برينستون وجامعة واشنطن في مدينة سانت لويس. وشغل منصب رئيس قسم الرياضيات لمدة خمس سنوات في جامعة واشنطن.

نشر كرانتز 50 كتاباً ونيف وأكثر من 150 بحثاً أكاديمياً. نال جائزة تشوفينت وجائزة بيكينباتش التي تمنحها الجمعية الأمريكية للرياضيات عن أحسن كتاب. كما نال جائزة المدرس المميز من جمعية خريجي جامعة كاليفورنيا فرع لوس أنجلوس وجائزة كيمبر. أشرف على 17 رسالة دكتوراه و 9 رسائل ماجستير.

تمهيد

تُعدّ الرياضيات والفلسفة من أقدم المواضيع الأكاديمية عبر التاريخ. تُعدّ الرياضيات من المواضيع الهائلة والمعقدة والتي يستعصي إدراكها على أي شخص أياً كان هذا الشخص. إن من يختار منا التخصص في الرياضيات يستطيع التخصص فقط في واحد من فروع الرياضيات الكثيرة وفي نهاية المطاف فإنه يبحث في جانب فرعي دقيق لكي يتمكن من الإسهام بأفكار لتطوير الرياضيات.

أحد التطورات المهمة في القرن الحادي والعشرين هو تخلل التفكير الرياضي والتحليلي في جميع مناحي الحياة. إننا جميعاً بحاجة إلى فهم كيفية انتشار الأمراض، احتمال إصابتنا بمرض متلازمة الجهاز التنفسي الحاد (سارس) أو مرض التهاب الكبد الوبائي. نحتاج جميعاً للتعامل مع المواضيع الاقتصادية. كما أنه يتوجب علينا التعامل مع الحاسبات الآلية وقواعد البيانات والشبكة العنكبوتية. الرياضيات جزء مكمل للنظريات وأنظمة التشغيل التي تعتمد عليها جميع أنظمة الحاسب الآلي. تُستخدم النظريات الرياضية لتصميم هياكل السيارات والتخطيط والتنظيم لإجراء العمليات الجراحية وفي تحليل عمليات الشغب في السجون. المواطن غير المُلِم بالتفكير الرياضي ينقصه جزء كبير من المؤهلات الحياتية.

لهذه الأسباب يكون من المناسب توفير كتاب لتعريف الطلاب أصول بعض الأفكار الرياضية. على الرغم من عدم إمكانية الخوض في التفاصيل الدقيقة جداً للبرهان الذي قدمه أندرو وايلز لمبرهنة فيرما الأخيرة إلا أننا نستطيع على الأقل وصف بعض الأفكار العريضة وراء طرح المسألة والتي قادت إلى التوصل إلى حل المسألة. وعلى الرغم من أننا لا نستطيع وصف الرياضيات المعقدة التي تتعلق بدراسة النظام الكوني ولكننا بدلاً من ذلك نستطيع شرح بعض أفكار بيرنارد ريمان عن الهندسة الفضائية. وعلى الرغم من عدم قدرتنا على الخوض في تفاصيل البحث الرياضي الذي يجريه أساتذة جامعة باريس هذه الأيام ولكننا نستطيع الإشارة إلى تطور الأفكار التي أدت إلى القيام بهذه الأبحاث.

تاريخ الرياضيات مثير ومثمر وهو جزء مهم من النشاط العقلي. التعليم الجيد يتكون من طرائق مختلفة لمعالجة المواضيع ومن المؤكد أن الرياضيات من أهم وأكثر أساليب الحوار تطوراً لدينا.

إن الهدف من وراء هذا الكتاب هو إطلاع الطالب على لغة الرياضيات وحياة الرياضيين من خلال استعراض موجز لمواضيع رياضيات لها أهمية تاريخية. وأيضاً مساعدة معلمي المستقبل على ممارسة بعض أفكار الرياضيات المهمة سواء كانت تقليدية أم حديثة.

يركز هذا الكتاب على الانخراط في الرياضيات وحل المسائل. هذا الكتاب هو وبكل صراحة كتاب في الرياضيات. الهدف من الاستعراض التاريخي هو تزويد القارئ ببعض جرعات من الرياضيات. أثناء قراءة الكتاب سيجد القارئ المبتدئ نفسه يتعلم الرياضيات من خلال تعرضه لنفس المسائل التي اشتغل عليها زينو وفيثاغورس وديكارت وفيرما وريمان. تتطلب قراءة هذا الكتاب استخدام قلم وأوراق وآلة حاسبة وحاسب آلي. يرغب الطالب بالتجريب لكي يصبح جزءاً من المعالجات الرياضية.

كتاب التاريخ هذا هو أيضاً فرصة للحصول على بعض المتعة. معظم علماء الرياضيات الذين نقدمهم في هذا الكتاب هم أشخاص يتسمون بالتعقيد ومع ذلك فإن حياتهم كانت مفعمة بالحيوية. هؤلاء يثيرون اهتمامنا على الصعيدين الشخصي والعلمي. هناك العديد من الروايات والنوادر التي تتعلق بفيثاغورس وجالوا وكانتور وبوانكاريه ونحن لا نتردد في إطلاق العنان لأنفسنا لسماع بعض الطرائف والإشاعات. وهذا بدوره يبعث الحياة في الموضوع ويجعله مثيراً للاهتمام.

يجب أن يكون واضحاً أن هذا الكتاب ليس سرداً لتاريخ الرياضيات كما هو مبين في الأطروحات الرائعة لبوير – ميرزباخ [BOM] أو كاتز [KAT] أو سميث [SMI]. ولكنه مجموعة من المقتطفات لبعض جوانب الرياضيات مضافاً إليها بعض المعلومات من أدبيات الموضوع لوضع الرياضيات في المنظور المناسب. سيتعرف القارئ على تاريخ الرياضيات من خلال المواضيع الرياضية المقدمة والأفكار الرياضية وحل المسائل وصياغة الأسئلة وطرحها.

إننا لا نخجل من بساطة المسائل التي نطلب من القارئ حلها. هذا الكتاب سيكون بمتناول شريحة كبيرة من الطلاب بخلفيات واهتمامات مختلفة. ومع ذلك فإن الطالب سيتعرف على بعض التفاضل والتكامل، نظرية الأعداد، الاستقراء الرياضي، الأعداد المركبة، هندسة ريمان، والعديد من

مواضيع الرياضيات الشيقة الأخرى. ولأننا نهدف إلى تعريف الطالب بالطرق التي يفكر بها الرياضيون والمواضيع المهمة لهم فإننا سنقدم براهين لبعض الحقائق المهمة:

(١) وجود الأعداد غير الكسرية.

(٢) وجود الأعداد المتسامية.

(٣) مبرهنة فيرما الصغرى.

(٤) مبرهنة تمام نظام الأعداد الحقيقية.

(٥) المبرهنة الأساسية في الجبر.

(٦) مبرهنة دريشليه.

سيتعرف قارئ هذا الكتاب على ماهية الرياضيات وما يقوم به الرياضيون.

هذا الكتاب موجّه لعدد من القرّاء المختلفين ولكن من المؤكد أن من بين هؤلاء القرّاء طلاب أقسام الرياضيات في المرحلة الجامعية الأولى (درجة البكالوريوس) الذين يحاولون اكتساب الخبرات التعليمية في مجال تخصصهم. من الطبيعي أن يقارن هؤلاء الطلاب بين الأفكار المختلفة التي طُرِحت في المقررات الدراسية وينظروا إليها على أنها تكتيل من الأفكار المنفصلة عن بعضها. يهدف هذا الكتاب إلى تجميع هذه الأفكار بصورة طبيعية توصل الطالب إلى ترابط هذه الأفكار بعضها مع بعض وتكوين قناعة بأن مواضيع الرياضيات يكمل بعضها البعض. سيبين هذا الكتاب أن الرياضيات نظام حيوي. كل من موضوعات هذا الكتاب يتضمن العديد من أنماط الرياضيات المختلفة والعديد من الطرائق الرياضية المختلفة. كما أن كلاً من فصول هذا الكتاب يحتوي على تمارين مميزة تسمى **"مشروعاً"** وهي عبارة عن مسائل قابلة للبحث والتعديل وتحث على التفكير ويمكن أن تتم مناقشتها في المحاضرة أو يقدمها الطالب كورقة بحث للمقرر أو مشروع للطلبة المتميزين. يتضمن كل بند من بنود الكتاب مراجع للاطلاع على المزيد من تفاصيل حياة علماء الرياضيات العظماء. وأيضاً ينتهي كل بند من بنود هذا الكتاب بعنوان **"مزيد من القراءات"** حيث تتضمن هذه المادة الثانوية على مراجع من الأعداد الشهرية لمجلة الرياضيات الأمريكية ومجلة الرياضيات الجامعية وغيرها من الدوريات التي تتيح المجال أمام الطالب الاطلاع المستقل على تفاصيل أحد المواضيع التي يختارها وتنمي أفقه بأسلوب أكاديمي.

نريد أن يكون هذا الكتاب خفيفاً وبليغاً. الفصول قصيرة ومن السهل على الطالب أن يتصفحها ويختار منها المواضيع التي تثير اهتمامه. يحتوي كل فصل على مجموعة تمارين، ويتخلل الكتاب أيضاً **"لك كي تحاول"** إن ذلك يعطي فرصة للطالب لاختبار فهمه للفكرة الجديدة المقدمة مباشرة. وسيكون ذلك مكافأة للطالب ويمنحه بعض الطمأنينة. كما يشعل ذلك فضول الطالب.

أول من حثني على كتابة هذا الكتاب هو ريتشارد بوناتشي (Richard Bonacci) وأنا أقدم له الشكر والعرفان على الأفكار التي قدمها لي وعلى تشجيعه. قدم كلوز بيترز (Klaus Peters) العديد من الملاحظات والانتقادات المهمة. قام دون ألبيرز (Don Albers) بترشيح الكتاب إلى جمعية الرياضيات الأمريكية (MAA) وساعدني على إكمال هذا المشروع. ومن المؤكد أن المراجعين الذين اختارهم لمراجعة هذا الكتاب قدموا لي عدداً وافراً من النصائح التي أدت إلى أن يكون هذا الكتاب أكثر دقة ويصلح للتدريس. قام زافين كاريان (Zaven Karian) بتحرير هذا المشروع وساعدني على إخراجه بصورته النهائية. إنني أشكرهم جميعاً على ما قدموه.

سيجد المدرس في هذا الكتاب الكثير من المادة الممتعة التي تشكل أساساً لمشاريع رياضية. كما يتضمن الكتاب أفكاراً لأوراق بحثية وحتى مشاريع للطلاب المميزين. يمكن استخدام الكتاب كمقرر لأدبيات الرياضيات للطلاب غير المتخصصين أو كمقرر في تاريخ الرياضيات أو كمقرر لتهيئة مدرسي الرياضيات أو كمقرر حل مسائل. أتمنى أن يساعد هذا الكتاب على ردم الهوة المشوشة بين الحياة التقنية والحياة الإنسانية. لأنه من المؤكد أن أهم شيء نقوم به في مجتمعنا هو التواصل. ورغبتي هنا أن نتواصل رياضياً.

المؤلفان

المحتويات

مقدمة المترجمَيْن ..... **هـ**

إهداء المؤلف ..... **ز**

نبذة عن المؤلف ..... **ط**

تمهيد ..... **ك**

الفصل الأول: اليونانيون القدماء وأساسيات الرياضيات **١**

(١,١) فيثاغورس ١

(١,٢) إقليدس ٩

(١,٣) أرخميدس ١٩

تمارين ٣٢

الفصل الثاني: محيرة زينون ومفهوم النهاية **٣٩**

(٢,١) محتوى المحيرة ٣٩

(٢,٢) نبذة عن حياة زينون الإلياني ٤١

(٢,٣) نظرة على المحيرات ٤٧

(٢,٤) الترميز العشري والنهايات ٥٢
(٢,٥) المجاميع غير المنتهية والنهايات ٥٣
(٢,٦) المتسلسلة الهندسية المنتهية ٥٥
(٢,٧) بعض الترميزات المفيدة ٥٨
(٢,٨) ملحوظات ختامية ٥٩
تمارين ٦٠
الفصل الثالث: الرياضيات المبهمة لهايباشيا ٦٥
(٣,١) مقدمة لهايباشيا ٦٥
(٣,٢) ما القطع المخروطي؟ ٧٢
تمارين ٧٦
الفصل الرابع: العالم الإسلامي وتطوير الجبر ٨٣
(٤,١) ملحوظات استهلالية ٨٣
(٤,٢) تطوير الجبر ٨٤
(٤,٣) الهندسة عند العرب ٩٧
(٤,٤) القليل من نظرية الأعداد عند العرب ١٠٢
تمارين ١٠٥
الفصل الخامس: كاردانو، أبيل، جالوا وحل المعادلات ١٠٩

(٥,١) مقدمة ١٠٩
(٥,٢) نبذة عن حياة كاردانو ١١٠
(٥,٣) معادلات الدرجة الأولى ١١٦
(٥,٤) مبادئ معادلات الدرجة الثانية ١١٦
(٥,٥) إكمال المربع ١١٨
(٥,٦) حل المعادلة التربيعية ١١٩
(٥,٧) المعادلة التكعيبية ١٢٢
(٥,٨) معادلات الدرجة الرابعة فأكثر ١٢٦
(٥,٩) أعمال أبيل وجالوا في هذا السياق ١٣٥
تمارين ١٣٦
الفصل السادس: رينيه ديكارت وفكرة الإحداثيات ١٣٩
(٦,٠) ملحوظات استهلالية ١٣٩
(٦,١) نبذة عن حياة رينيه ديكارت ١٤٠
(٦,٢) خط الأعداد الحقيقية ١٤٥
(٦,٣) المستوى الديكارتي (الكارتيزي) ١٤٧
(٦,٤) استخدام الإحداثيات الديكارتية لدراسة الهندسة الإقليدية ١٥٠
(٦,٥) الإحداثيات في الفضاء ثلاثي الأبعاد ١٥٣

تمارين ١٥٧

الفصل السابع: بيير فيرما واكتشاف التفاضل ١٥٩

(٧,١) نبذة عن حياة فيرما ١٥٩

(٧,٢) طريقة فيرما ١٦٢

(٧,٣) أفكار متقدمة في حساب التفاضل والتكامل: المشتقة والمماس ١٦٥

(٧,٤) تمهيدية فيرما ومسائل القيم العظمى والصغرى ١٧٠

تمارين ١٧٦

الفصل الثامن: إسحق نيوتن العظيم ١٧٩

(٨,١) نبذة عن حياة نيوتن ١٧٩

(٨,٢) فكرة التكامل ١٨٦

(٨,٣) حساب التكامل ١٩١

(٨,٤) المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل ١٩٣

(٨,٥) بعض الحسابات الأساسية ١٩٦

(٨,٦) بعض الأمثلة ٢٠٠

تمارين ٢١٠

الفصل التاسع: الأعداد المركبة والمبرهنة الأساسية في الجبر ٢١٣

(٩,١) نظام أعداد جديد ٢١٣

(٩,٢) إنشاء نظام الأعداد المركبة ٢١٣

(٩,٣) أساسيات الأعداد المركبة ٢٢٢

(٩,٤) المبرهنة الأساسية في الجبر ٢٢٨

(٩,٥) إيجاد جذور كثيرة حدود ٢٣٤

تمارين ٢٣٦

الفصل العاشر: كارل فريدريك جاوس: أمير الرياضيات ٢٣٩

(١٠,١) نبذة عن جاوس الرجل ٢٣٩

(١٠,٢) مبرهنة ذات الحدين ٢٤٦

(١٠,٣) مبرهنة الباقي الصينية ٢٦٠

(١٠,٤) أساليب إنشائية لإيجاد الحل $\underline{x}$ ٢٦٢

(١٠,٥) المقلوب التربيعي وأعداد جاوس الصحيحة ٢٦٣

(١٠,٦) أعداد جاوس الصحيحة ٢٦٦

تمارين ٢٧٠

الفصل الحادي عشر: صوفي جيرمان ومحاولة حل مسألة فيرما الأخيرة ٢٧٣

(١١,١) ولادة طفل مُلهَم ومختلف ٢٧٣

(١١,٢) صوفي جيرمان ومسألة فيرما ٢٨٢

تمارين ٢٨٦

الفصل الثاني عشر: كوشي وأساسيات التحليل ٢٩١

(١٢,١) مقدمة ٢٩١

(١٢,٢) لماذا نحتاج الأعداد الحقيقية؟ ٢٩٦

(١٢,٣) كيفية إنشاء الأعداد الحقيقية ٢٩٧

(١٢,٤) خصائص نظام الأعداد الحقيقية ٣٠٢

تمارين ٣١١

الفصل الثالث عشر: الأعداد الأولية ٣١٣

(١٣,١) مرشحة (غربال) إيراتوستينس ٣١٣

(١٣,٢) عدد الأوليات غير منته ٣١٧

(١٣,٣) مزيد من الأفكار عن الأعداد الأولية ٣١٨

(١٣,٤) مفهوم الأوليان نسبياً ٣٢٣

تمارين ٣٢٦

الفصل الرابع عشر: دريشليه وكيفية العد ٣٢٩

(١٤,١) نبذة عن حياة دريشليه ٣٢٩

(١٤,٢) مبدأ برج الحمام ٣٣٢

(١٤,٣) نظرية رامزي ٣٣٦

تمارين ٣٤٠

الفصل الخامس عشر: بيرنارد ريمان وهندسة السطوح ٣٤٣

(١٥,٠) مقدمة ٣٤٣

(١٥,١) كيفية قياس طول منحنى ٣٤٧

(١٥,٢) طريقة ريمان لقياس طول القوس ٣٥٠

(١٥,٣) القرص الزائدي ٣٥٣

(١٥,٤) استخدام التكامل ٣٥٦

تمارين ٣٦٠

الفصل السادس عشر: جورج كانتور والرتب غير المنتهية ٣٦٣

(١٦,١) ملحوظات استهلالية ٣٦٣

(١٦,٢) ما العدد؟ ٣٦٨

(١٦,٣) وجود الأعداد المتسامية ٣٧٩

تمارين ٣٨١

الفصل السابع عشر: أنظمة الأعداد ٣٨٥

(١٧,١) الأعداد الطبيعية ٣٨٧

(١٧,٢) الأعداد الصحيحة ٣٨٩

(١٧,٣) الأعداد الكسرية ٣٩١

(١٧,٤) الأعداد الحقيقية ٣٩٣

(١٧,٥) الأعداد المركبة ٣٩٧

تمارين ٣٩٨

الفصل الثامن عشر: هنري بوانكاريه والطفل الظاهرة ٤٠٣

(١٨,١) ملحوظات استهلالية ٤٠٣

(١٨,٢) هندسة الصفائح المطاطية ٤٠٨

(١٨,٣) فكرة التوفيق ٤١٠

(١٨,٤) مبرهنة النقطة الثابتة لبراور ٤١٢

(١٨,٥) مبرهنة شطيرة اللحم العامة ٤١٩

تمارين ٤٢٣

الفصل التاسع عشر: سونيا كوفاليفسكايا ورياضيات الميكانيكا ٤٢٧

(١٩,١) نبذة عن حياة سونيا كوفاليفسكايا ٤٢٧

(١٩,٢) الأبحاث العلمية لسونيا كوفاليفسكايا ٤٣٤

(١٩,٣) ما بعد سونيا كوفاليفسكايا ٤٤١

تمارين ٤٤١

الفصل العشرون: إيمي نويثر وولادة الجبر الحديث ٤٤٧

(٢٠,١) نبذة عن حياة إيمي نويثر ٤٤٧

(٢٠,٢) إيمي نويثر والجبر المجرد: الزمر ٤٥٢

(٢٠,٣) إيمي نويثر والجبر المجرد: الحلقات ٤٥٦

تمارين ٤٥٩

الفصل الحادي والعشرون: طرائق البرهان ٤٦٣

(٢١,١) طريقة المسلمات ٤٦٦

(٢١,٢) البرهان بالاستقراء ٤٦٨

(٢١,٣) البرهان بالتناقض ٤٧٢

(٢١,٤) البرهان المباشر ٤٧٥

(٢١,٥) طرائق برهان أخرى ٤٧٧

تمارين ٤٨٠

الفصل الثاني والعشرون: آلان تورينغ والتعمية ٤٨٣

(٢٢,٠) خلفية آلان تورينغ ٤٨٣

(٢٢,١) آلة تورينغ ٤٨٥

(٢٢,٢) المزيد عن حياة آلان تورينغ ٤٨٧

(٢٢,٣) ما علم التعمية؟ ٤٨٩

(٢٢,٤) التعمية باستخدام التحويلات التآلفية ٤٩٥

(٢٢,٥) تحويلات الثنائيات ٥٠١

تمارين ٥٠٥

المراجع **٥٠٩**

ثبت المصطلحات **٥١٥**

أولاً: عربي – إنجليزي ٥١٥

ثانياً: إنجليزي – عربي ٥٤٥

كشاف الموضوعات **٥٨١**