نظرية المعادلات التفاضلية

الأستاذ الدكتور رحمي إبراهيم إبراهيم عبد الكريم

دكتوراه الفلسفة في الرياضة البحتة (Ph. D.)

دكتوراه العلوم في الرياضة البحتة (D. Sc.)

أستاذ الرياضة البحتة

بكلية العلوم

جامعة الرياض

الناشر: عمادة شؤون المكتبات ـ جامعة الرياض

ص. ب: ٢٤٥٤ الرياض ـ المملكة العربية السعودية

© ١٩٨٠م جامعة الرياض
جميع حقوق الطبع محفوظة . غير مسموح بطبع أي جزء من أجزاء هذا الكتاب ، أو خزنه في أي نظام لخزن المعلومات واسترجاعها ، أو نقله على أية هيئة أو بأية وسيلة ، سواء كانت الكترونية أو شرائط ممغنطة ، أو ميكانيكية ، أو استنساخاً ، أو تسجيلاً ، أو غيرها ، إلا باذن كتابي من صاحب حق الطبع .

الطبعة الأولى ١٤٠١هـ (١٩٨١م)

طبع في
شركة الطباعة العربية السعودية (المحدودة)
العمارية - الرياض

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

يسرني أن أقدم إلى القارئ العربي الكريم كتاب « نظرية المعادلات التفاضلية » ليسد فراغاً ملموساً في مكتبة الرياضيات باللغة العربية . ولا شك أن الدراسة في جامعاتنا العربية لا زالت في أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع والكتب المقررة المكتوبة باللغة العربية ، والعمل على سد هذا النقص مهم إلى حد كبير في تنشئة أجيال نريد لها أن تبني صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من العلم والمعرفة .

ويتألف هذا الكتاب من أربعة أبواب . أما الباب الأول فهو يتعلق بدراسة خواص المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة . وقد درس أولا محدد « رونسكي » Wronski الذي يلعب دوراً كبيراً في استنباط الارتباط الخطي والاستقلال الخطي لحلول المعادلة التفاضلية المتجانسة . ثم اشتقت صيغة « آبل » بطريقتين مختلفتين ؛ ومن ثَـمّ حصلنا على ما تسمى « التبادلية » الشهيرة لمحدد « رونسكي » . وبعد ذلك ــ باستخدام خواص محدد « رونسكي » ــ استنبطت بعض الخواص الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية المتجانسة ، كما اشتقت عدة خواص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة .

وقد خصص الباب الثاني لموضوع « تغيير البارامترات » وقد نوقشت طريقة « تخفيض الرتبة » والتي تسمى كذلك بطريقة « دالمبير » . وهي تتعلق بإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة ، إذا علم حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة . ثم استخدمت صيغة « آبل » لاشتقاق صيغة لإيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة بمعلومية حل لها . وبعد ذلك درست طريقة « تغيير الثوابت » أو « تغيير البارامترات » التي تمكننا من إيجاد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة إذا علم حلان مستقلان خطياً للمعادلة المتجانسة المناظرة . وفي الواقع ، فإن طريقة « تخفيض الرتبة » تعتبر حالة خاصة من طريقة « تغيير الثوابت » . وفي نهاية هذا الباب اشتقت صيغة « ليوفيل » Liouville .

وأما الباب الثالث فقد أفرد لإيجاد الحل العام صراحة للمعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

من الرتبة الثانية . وقد بحثت أولا طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة وفقاً لنوع جذري المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة . ثم درست مسألة إيجاد « حل خاص » للمعادلة غير المتجانسة . وقد نوقشت لذلك طريقتان . أولا : طريقة « المعاملات غير المعينة » ، وهذه الطريقة ــ بالرغم من أهميتها ــ يمكن استخدامها فقط في حالات خاصة للدالة f(x) . وثانياً : طريقة « تغيير الثوابت » ، وهي تنجح دائماً في إيجاد حل خاص للمعادلة غير المتجانسة بمعلومية حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة المناظرة ، حتى في تلك الحالات التي لا تصلح فيها الطريقة الأولى . وفي نهاية هذا الباب درست معادلات « أويلر » .

ويحتوي الباب الرابع والأخير على دراسة عدة طرق هامة لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة . وقد درست « الصورة القياسية » للمعادلة التفاضلية وكيفية تحويل المعادلة إليها . كما أوردت بعض النظريات المتعلقة باللامتغير I في الصورة القياسية . ثم نوقشت طريقة تحليل المؤثر ، وهي تتوقف على إمكانية تحليل الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية إلى عاملين كل منهما من الدرجة الأولى في المؤثر D . كما أوجد الشرط اللازم والكافي لكي يكون المؤثران الخطيان قابلين للمبادلة بالنسبة لحاصل الضرب . كذلك تم بحث المعادلات التفاضلية التامة وطريقة مكاملتها .

فإذا كانت المعادلة ليست تامة ، فإن البحث عن عامل مكامل لها سوف يؤدي بدوره إلى البحث عن حل لمعادلة أخرى تسمى « بالمعادلة المزاملة » . وقد درست هنا المعادلة المزاملة والمعادلة « المتزاملة ذاتياً » ، واشتقت النظريات الخاصة بذلك . واختتم هذا الباب بشرح مسهب لكيفية تكوين المعادلات التفاضلية الخطية .

هذا ، وقد كتبت المصطلحات العلمية باللغتين العربية والإنجليزية ، وذلك تيسيراً للطالب عملية الاطلاع في المراجع الأجنبية . وهذا ما سوف يكون محتاجاً إليه في مراحله التعليمية المتقدمة .

وقد أعد هذا الكتاب ليكون مرجعاً إلى جانب كونه كتاباً دراسياً في المقرر ٣٢١ ريض : المعادلات التفاضلية (١) .

والشيء المميز لهذا الكتاب هو بساطته ووضوحه . . . بالرغم من عمق المادة .

ويحتوي هذا الكتاب على أمثلة توضيحية عديدة إثر كل بند من بنوده ، وذلك لكي تلقي الضوء على كيفية تطبيق النظريات الواردة واستخدامها ، وللتأكد من فهم الطالب للموضوع فهماً دقيقاً .

كما يتضمن الكتاب عدداً وفيراً من التمارين المتدرجة ، وضعت بعناية فائقة ؛ وذُيل كل باب من أبوابه بتمارين كثيرة متنوعة . كما روعي كتابة أجوبة كل التمارين ، وذلك لكي يتأكد الطالب من صحة حله .

والله أسأل أن يوفقنا لما فيه نهضة أمتنا العربية .

والله ولـــي التوفيـــق . . .

الرياض في ١٤٠٠/٢/٢٧ هـ

١٥/ ١/١٩٨٠ م

رحمي إبراهيم إبراهيم عبد الكريم

المحتويات

الصفحة

تقديم .....

الباب الأول : المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

مقدمة ٣

(١ ــ ١) نظرية الوجود والوحدة ٥

(١ ــ ٢) الخاصية الخطية للمؤثر L ٩

(١ ــ ٣) الارتباط الخطي والاستقلال الخطي ١٣

(١ ــ ٤) محدد رونسكي ١٩

(١ ــ ٥) خواص الحلول ٢٩

(١ ــ ٦) المعادلة التفاضلية غير المتجانسة ٣٧

الباب الثاني : تغيير البارامترات

مقدمة ٤٩

(٢ ــ ١) تخفيض الرتبة ٥١

(٢ ــ ٢) إيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة إذا علم حل لها ٦٥

(٢ ــ ٣) طريقة تغيير البارامترات ٧١

(٢ ــ ٤) صيغة ليوفيل ٨٥

الباب الثالث : المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

مقدمة ٩٧

(٣ ــ ١) المعادلة المتجانسة من الرتبة الثانية ٩٩

(٣ ــ ٢) المعادلة المساعدة لها جذران حقيقيان مختلفان ($\Delta>0$) ١٠٣
(٣ ــ ٣) المعادلة المساعدة لها جذران متساويان ($\Delta=0$) ١١١
(٣ ــ ٤) المعادلة المساعدة لها جذران مركبان مترافقان ($\Delta<0$) ١١٧
(٣ ــ ٥) طريقة المعاملات غير المعينة ١٢٣
(٣ ــ ٦) استخدام طريقة تغيير الثوابت ١٥٩
(٣ ــ ٧) معادلات أويلر ١٧٣

الباب الرابع : طرق أخرى لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة

مقدمة ١٨٧
(٤ ــ ١) الصورة القياسية ١٨٩
(٤ ــ ٢) تحليل المؤثر ١٩٩
(٤ ــ ٣) المعادلات التامة ٢٠٩
(٤ ــ ٤) المعادلة المزاملة ٢١٥
(٤ ــ ٥) تكوين المعادلات التفاضلية الخطية ٢٢٥

المراجع ٢٣٣