





# مقدمة في البرمجة الخطية

تأليف

د. إبراهيم بن صالح العليان

الأستاذ المساعد بقسم الرياضيات بكلية العلوم

جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب. 68903 - الرياض 11037 - المملكة العربية السعودية



ح جامعة الملك سعود، ١٤٢٨هـ / ٢٠٠٧م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

العليان ، ابراهيم بن صالح

مقدمة في البرمجة الخطية / إبراهيم بن صالح العليان - الرياض ، ١٤٢٨ هـ

٣٢٨ ص ، ١٧ × ٢٤ سم

ردمك : ١ - ١٥٧ - ٥٥ - ٩٩٦٠

١- البرمجة الخطية ٢- البرمجة (رياضيات) أ- العنوان

١٤٢٨ / ١٤٢٩

ديوي ٧٢ ، ٥١٩

رقم الإيداع : ١٤٢٩ - ١٤٢٨ هـ

ردمك : ١ - ١٥٧ - ٥٥ - ٩٩٦٠

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، شكلها المجلس العلمي بالجامعة،  
وبعد اطلاع المجلس على تقارير المحكمين، وافق على نشره في  
اجتماعه التاسع للعام الدراسي ١٤٢٧ / ١٤٢٨ هـ المعقود في  
تاريخ ١ / ٢ / ١٤٢٨ هـ الموافق ١ / ٢١ / ٢٠٠٧ م.

النشر العلمي والمطابع ١٤٢٨هـ



## إهداء

أهدي هذا الكتاب إلى كل من والدي ووالدتي حفظهما الله ، واللذين كانا السبب الرئيسي بعد الله في غرس حب التعلم في نفسي منذ كنت صغيراً وكان دعمهما وتشجيعهما لي خلال مراحل حياتي هو ما شجعني على إكمال دراستي ومن ثم تأليف هذا الكتاب.

كما أهدي هذا الكتاب إلى زوجتي التي كانت خير سند لي خلال الفترة التي قضيتها في تأليف الكتاب.



## مقدمة

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على أشرف المرسلين ، نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ، وبعد :

فقد نشأت فكرة تأليف هذا الكتاب أثناء قيامي بتدريس مقرر البرمجة الخطية (٤٥٦ رياض) لطلاب الرياضيات في جامعة الملك سعود خلال الفترة من عام ١٤٢٥ هـ إلى عام ١٤٢٧ هـ. كانت البداية عبارة عن ملخص للمادة مستمد من عدة كتب عربية وأجنبية. بعد ذلك ، تمت طباعة هذا الملخص وخرج على شكل مذكرة تم تحسينها وتعديلها خلال الفصول التي قمت فيها بتدريس هذا المقرر حتى خرج الكتاب في هذه الصورة.

يعتبر علم البرمجة الخطية من العلوم الرياضية الحديثة التي نشأت في منتصف القرن العشرين أثناء الحرب العالمية الثانية ، وذلك عندما قام مجموعة من العلماء بدراسة بعض المسائل التي كانت تحتاجها وبشدة في ذلك الوقت القوات الجوية الأمريكية. كانت هذه المسائل تهتم بدراسة القيم العظمى والصغرى لدوال خطية. من بين مجموعة العلماء هؤلاء ، استطاع جورج دانترج في عام ١٩٤٧ م أن يوجد الصيغة العامة لمسائل البرمجة الخطية ، واستطاع حل هذه المسائل بتطوير طريقة السمبلكس مما أدى لحدوث ثورة في علم البرمجة الخطية. بعد ذلك تمت عدة دراسات لتطوير النظريات المتعلقة بمسائل البرمجة الخطية بشكل عام وطريقة السمبلكس بشكل خاص. وانتشر هذا العلم وانتقل الاهتمام به إلى المصانع التي دعمته بشكل كبير ، وتطور هذا العلم كثيراً منذ ذلك الحين.

يتعرض هذا الكتاب لمبادئ البرمجة الخطية فهو يغطي مفهوم البرمجة الخطية مع العديد من الأمثلة والمسائل. كما يوضح طريقة حل مسائل البرمجة الخطية. ويفترض في القارئ أن يكون على إلمام بمبادئ الجبر الخطي حتى يستطيع تتبع الكتاب بشكل جيد. ينقسم هذا الكتاب إلى تسعة فصول، وفي نهاية كل فصل يوجد العديد من التمارين التي تساعد القارئ على فهم الفصل بشكل أكثر عمقاً. كما يحتوي هذا الكتاب على العديد من الأمثلة المحلولة. إضافة لذلك اعتمدت في تأليفي لهذا الكتاب على طريقة الشرح من خلال المثال؛ فمثلاً عند شرح مفهوم معين نبدأ بمثال ثم نقوم بتوضيح هذا المفهوم عن طريق المثال. وقد استخدمت الترقيم المألوف في الكتب لكل من التعاريف والمبرهنات والأمثلة، فعندما نكتب تعريف (١،٢)، فهذا يعني التعريف الثاني في الفصل الأول، ... وهكذا.

نقدم في الفصل الأول لمحة تاريخية عن نشأة البرمجة الخطية ثم نعطي تعريفاً لمسألة البرمجة الخطية مع إعطاء بعض الأمثلة عليها، ثم نوضح كيفية صياغة مسائل البرمجة الخطية. في الفصل الثاني، نركز على طريقة حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم مع إعطاء بعض الأساسيات الهندسية المهمة.

الفصلان الثالث والرابع يعدان من أهم الفصول إذ تناقش فيهما طريقة جبرية لحل مسائل البرمجة الخطية، هذه الطريقة هي طريقة السمبلكس وتعد من الطرق المشهورة لحل مسائل البرمجة الخطية. في البداية، نعطي مقدمة عن طريقة السمبلكس من خلال بعض التعاريف المهمة، ثم نبين فكرة طريقة السمبلكس وندرس الحالات التي قد تظهر معنا عند حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس.

يعنى الفصل الخامس بطريقة السمبلكس المعدلة حيث يقدم شرحاً مفصلاً لهذه الطريقة ثم يبين مدى أهميتها. ويقدم الفصل السادس مفهوم تحليل الحساسية



والذي يعد من المواضيع المهمة في البرمجة الخطية، حيث يبين هذا الفصل أهمية تحليل الحساسية والطريقة المستخدمة في تحليل الحساسية.

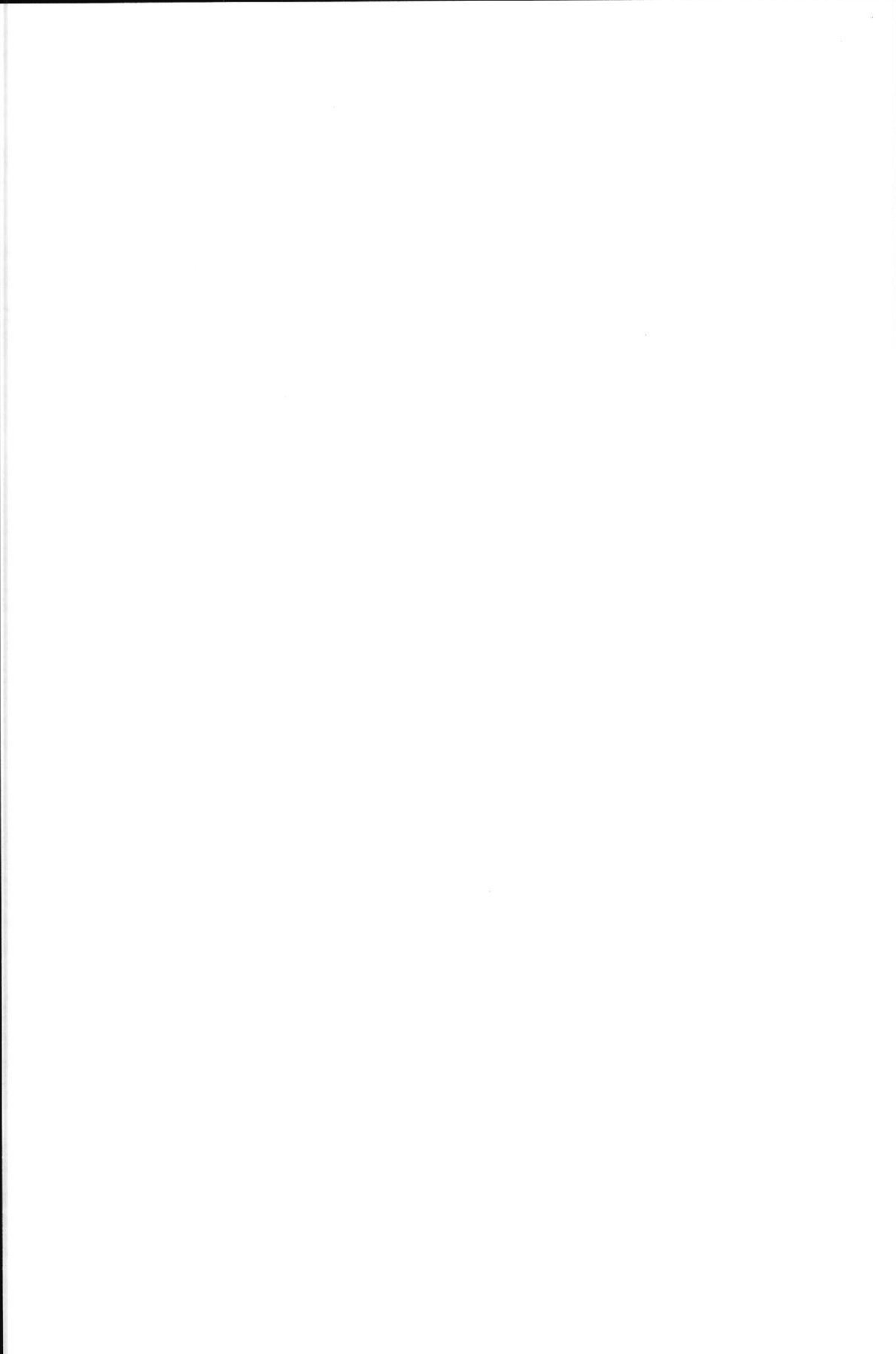
الفصل السابع يتعرض لمفهوم الثنائية، وفيه نبين كيفية إيجاد المسألة المرافقة لمسألة برمجة خطية، كما نوضح المعنى الاقتصادي للثنائية. بينما الفصل الثامن يعنى بنوعين خاصين من مسائل البرمجة الخطية وهما مسائل النقل ومسائل التوظيف، حيث تتم دراسة كل نوع مع بيان الطريقة المتبعة في حله. وأخيراً فإن الفصل التاسع والأخير يتطرق لمسائل الشبكات، حيث يعطي بعض التعاريف الأساسية في الشبكات ثم يتطرق إلى مسألة المسار الأقصر ومسألة التدفق الأعظم، ويبين في كل مسألة الطريقة المتبعة لحلها.

هذا ولا يفوتني أن أوجه الشكر إلى طلاب مقرر البرمجة الخطية في جامعة الملك سعود، وكذلك زملائي في جامعة الملك سعود الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب لحيز الوجود. والذين كان لهم دور كبير في كثير من التعديلات التي طرأت على مسودة هذا الكتاب خلال فترة تدريسي لهذا المقرر.

والشكر موصول لمركز بحوث كلية العلوم على دعمه، حيث تم تأليف هذا الكتاب بدعم من مركز بحوث كلية العلوم برقم (Math/2005/09/B).

وفي الختام أمل أن أكون قد وفقت في تقديم نبذة عن البرمجة الخطية، وأن يجد هذا الكتاب الاستحسان والقبول لدى القارئ. كما أرحب بالآراء والنقد البناء من الزملاء والطلاب فيما يتعلق بمادة الكتاب، وأقدم شكري لكل من يرشدني إلى مواضع النقص أو الخطأ وذلك على الإيميل [ialolyan05@yahoo.com](mailto:ialolyan05@yahoo.com).  
والله من وراء القصد.

المؤلف



# المحتويات

إهداء ..... هـ

مقدمة ..... ز

## الفصل الأول: البرمجة الخطية تعاريف وأمثلة

(١,١) لمحة تاريخية ..... ١

(١,٢) تعريف البرمجة الخطية ..... ٤

(١,٣) مسائل يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية ..... ٧

(١,٤) صياغة مسائل البرمجة الخطية ..... ٨

(١,٤,١) مسألة الإنتاج ..... ١٣

(١,٤,٢) مسألة التغذية ..... ١٥

تمارين الفصل الأول ..... ١٩

## الفصل الثاني: حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم

(٢,١) أساسيات هندسية ..... ٢٤

(٢,١,١) المجموعة المحدبة ..... ٢٤

(٢,١,٢) المستوى الفوقى والمجسم المضلع ..... ٢٦

(٢,١,٣) النقاط الحدية ..... ٣٠

(٢,٢) منطقة الحل والحل الأمثل ..... ٣٢

(٢,٣) رسم منطقة الحل ( $\Omega$ ) ..... ٣٤

(٢,٤) حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم ..... ٣٨

- ٤٦ ..... (٢,٥) حالات خاصة
- ٤٦ ..... (٢,٥,١) وجود أكثر من حل
- ٤٩ ..... (٢,٥,٢) عدم إمكانية الحل
- ٥٠ ..... (٢,٥,٣) المسائل غير محدودة الحل
- ٥٥ ..... تمارين الفصل الثاني

### الفصل الثالث: طريقة السمبلكس

- ٦٤ ..... (٣,١) الصيغة القياسية
- ٦٥ ..... (٣,١,١) تحويل المتراجحات من النوع " $\leq$ " إلى معادلات
- ٦٦ ..... (٣,١,٢) تحويل المتراجحات من النوع " $\geq$ " إلى معادلات
- ٦٦ ..... (٣,١,٣) خطوات تحويل مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية
- ٦٩ ..... (٣,٢) المتغيرات الأساسية والحل الأساسي
- ٧٦ ..... (٣,٣) طريقة السمبلكس
- ٩٧ ..... تمارين الفصل الثالث

### الفصل الرابع : حالات خاصة في طريقة السمبلكس

- ١٠٤ ..... (٤,١) وجود أكثر من حل
- ١٠٧ ..... (٤,٢) المسائل غير محدودة الحل
- ١١١ ..... (٤,٣) الحل غير المنتظم
- ١١٩ ..... (٤,٤) طريقة M الكبيرة
- ١٢٨ ..... (٤,٥) طريقة المرحلتين
- ١٣٨ ..... تمارين الفصل الرابع

### الفصل الخامس: طريقة السمبلكس المعدلة

- (٥,١) بعض الصيغ المهمة ..... ١٤٦
- (٥,٢) طريقة السمبلكس المعدلة ..... ١٥٥
- تمارين الفصل الخامس ..... ١٦٦

### الفصل السادس: تحليل الحساسية

- (٦,١) أهمية تحليل الحساسية ..... ١٧٠
- (٦,٢) تحليل الحساسية باستخدام الرسم ..... ١٧٢
- (٦,٢,١) تحليل تغير معاملات دالة الهدف على الحل الأمثل ..... ١٧٧
- (٦,٢,٢) تحليل تغير الطرف الأيمن على الحل الأمثل ..... ١٨١
- (٦,٣) طريقة السمبلكس باستخدام المصفوفات ..... ١٨٥
- (٦,٤) تحليل الحساسية باستخدام المصفوفات ..... ١٩٢
- (٦,٤,١) تغير معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي ..... ١٩٥
- (٦,٤,٢) تغير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي ..... ١٩٩
- (٦,٤,٣) تغير الطرف الأيمن من القيود ..... ٢٠١
- تمارين الفصل السادس ..... ٢٠٥

### الفصل السابع: الثنائية

- (٧,١) إيجاد المسألة المرافقة ..... ٢١٢
- (٧,١,١) إيجاد المسألة المرافقة لمسألة طبيعية ..... ٢١٣
- (٧,١,٢) إيجاد المسألة المرافقة لمسألة غير طبيعية ..... ٢١٧
- (٧,٢) المعنى الاقتصادي لمسألة الثنائية ..... ٢٢١

- ٢٢٣ ..... النظرية الأساسية للثنائية (٧,٣)
- ٢٢٤ ..... الصيغة الثنائية الضعيفة (٧,٣,١)
- ٢٢٨ ..... نظرية الثنائية (٧,٣,٢)
- ٢٣٥ ..... نظرية متممة المكمل (٧,٣,٣)
- ٢٣٨ ..... تمارين الفصل السابع

### الفصل الثامن: مسائل النقل والتوظيف

- ٢٤٣ ..... مسائل النقل (٨,١)
- ٢٥١ ..... إيجاد حل أساسي مقبول لمسألة النقل (٨,١,١)
- ٢٥٤ ..... طريقة الركن الشمالي الغربي (٨,١,٢)
- ٢٥٩ ..... طريقة السمبلكس لحل مسألة النقل (٨,١,٣)
- ٢٨٢ ..... مسائل التوظيف (٨,٢)
- ٢٨٤ ..... الطريقة الهنغارية (٨,٢,١)
- ٢٩٠ ..... تمارين الفصل الثامن

### الفصل التاسع: مسائل الشبكات

- ٢٩٥ ..... تعاريف أساسية (٩,١)
- ٢٩٧ ..... مسألة المسار الأقصر (٩,٢)
- ٢٩٨ ..... طريقة دايجكسترا (٩,٢,١)
- ٣٠٢ ..... مسألة التدفق الأعظم (٩,٣)
- ٣٠٥ ..... طريقة فورد فولكرسون (٩,٣,١)
- ٣١٤ ..... تمارين الفصل التاسع

٣١٧ .....	المراجع
٣١٩ .....	كشاف الموضوعات