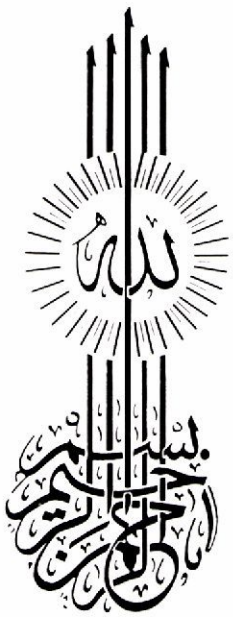
بسم الله الرحمن الرحيم

حساب التفاضل والتكامل

الجزء الثاني

تأليف

الدكتور حسن حميدة　　الدكتور تحسين غزال　　الدكتور عبدالله محمد الراشد

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة الملك سعود

عمادة شؤون المكتبات - جامعة الملك سعود

ص. ب ٢٢٤٨٠ الرياض ١١٤٩٥ المملكة العربية السعودية

ⓒ ١٤٠٥ ـ ١٤١٦هـ/١٩٨٥ ـ ١٩٩٦م، جامعة الملك سعود

الطبعة الأولى: ١٤٠٨هـ (١٩٨٨م).
الطبعة الثانية: ١٤١٦هـ (١٩٩٦م) (مزيدة ومنقّحة)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
حميدة، حسن
حساب التفاضل والتكامل/ حسن حميدة، تحسين غزال، عبدالله محمد الراشد. ـ ط٢. ـ الرياض.
٦٠٠ ص؛ ٢١ × ٢٨سم
ردمك ٤ ـ ٢٩٧ ـ ٠٥ ـ ٩٩٦٠ (مجموعة)
٢ ـ ٢٩٨ ـ ٠٥ ـ ٩٦٦٠ (ج٢، غلاف)
٠ ـ ٢٩٩ ـ ٠٥ ـ ٩٦٦٠ (ج٢، جلد)
١ ـ التفاضل والتكامل ٢ ـ التحليل الرياضي ٣ ـ المعادلات الرياضية
أ ـ غزال، تحسين (م. مشارك) ب ـ الراشد، عبدالله محمد (م. مشارك)
جـ ـ العنوان.
ديوي ٥١٥,١ ١٦/١٢٨٩

رقم الإيداع: ١٦/١٢٨٩

حكّمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكّلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس على نشره في اجتماعه السادس للعام الدراسي ١٤٠٤/١٤٠٥هـ، المعقود بتاريخ ١٤٠٥/٢/٢٥هـ ثم وافق المجلس على إعادة طباعته في اجتماعه التاسع عشر للعام الدراسي ١٤١٤هـ/١٤١٥هـ الذي عُقد بتاريخ ١٤١٥/١/٣هـ الموافق ١٩٩٤/٦/١٢م.

مطابع جامعة الملك سعود ١٤١٦هـ

مقدمة

الطبعة الثانية

الحمدلله والصلاة والسلام على رسول الله وبعد

فإن إعادة طباعة هذا الكتاب أعطانا الفرصة لتلبية ملاحظات أبداها زملاء لنا حول الطبعة الأولى. فلقد سعينا إلى معالجة أخرى للتكامل حسب مفهوم ريمان بحيث أصبح أمام القارىء الكريم معالجتان منفصلتان لمفهوم التكامل:

المعالجة الأولى استندت إلى الدوال الدرجية، ولا يخفى ما لهذه الطريقة من ميزات سبق ذكرها في مقدمة الطبعة الأولى. أما المعالجة الثانية فقد استندت إلى مجموع ريمان وهي الطريقة التي درجت عليها أغلب كتب التكامل وألفها المدرسون.

وناحية أخرى احتوتها الطبعة الثانية وأغفلتها الطبعة الأولى ألا وهو موضوع الإحداثيات القطبية. وهو موضوع له أهميته، إذ أنه يجعل التعامل مع العديد من المسائل ميسرًا فهناك منحنيات معينة تصبح معادلاتها أسهل في نظام الإحداثيات القطبية مما ييسر، على سبيل المثال، حساب بعض التكاملات واستنتاج مساحات مناطق معينة.

وختامًا فإننا نتقدم بجزيل الشكر لزملائنا الأفاضل الذين أرشدونا إلى ما اعترضهم من نقاط أثناء تدريس هذا الكتاب ونأمل أن نكون قد قدمنا طبعة جديدة متناسقة في مواضيعها، سهلة الفهم، خالية من الأخطاء. وإننا إذ نكرر شكرنا لمن ساهم في تحسين مستوى هذا الكتاب لنرجو مخلصين في ألا يبخل أحد من ذوي التخصص في إبداء ملاحظاتهم وإسداء نصائحهم التي سنوليها جل اهتمامنا.

ولا ننسى في النهاية أن نشكر عمادة شؤون المكتبات في جامعة الملك سعود على تفضلها في نشر هذه الطبعة. ونرجو من الله سبحانه وتعالى الأجر وهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل.

المؤلفون

مقدمة
الطبعة الأولى

يسعدنا أن نتقدم للقارىء الكريم بهذا الكتاب راجين أن ينال منه الاستحسان والقبول وأن يثري المكتبة العربية بما فيه الخير والنفع. يتجلى من عنوان هذا الكتاب أنه يوجد جزآن: الجزء الأول قد عني بحساب التفاضل أما هذا الجزء (الثاني) الذي بين يدينا فهو يعنى بحساب التكامل ويعتبر امتدادا طبيعيا للجزء الأول.

لقد نهجنا طريقة جديدة في موضوع التكامل (تكامل ريمان) وذلك بدراسته عن طريق الدوال الدرجية *Step Functions* بالرغم من أننا تطرقنا للطريقة التقليدية (مجموع ريمان).

من الأسباب التي دعتنا إلى معالجة التكامل بهذه الطريقة أن:

١ ـ مفهوم التكامل عرف أولا للدوال الدرجية وبما أن تكامل هذه الدوال هو عبارة عن مجموع منتهٍ فإن حساب التكامل في هذه الحالة سهل للغاية كما أن إشارة التكامل تصبح مألوفة لدى الطالب من خلال تعلمه لخواص التكامل بالنسبة لهذه الدوال، وهذا يمهد له الانتقال بيسر وسهولة من الدوال الدرجية إلى دوال أعم.

٢ ـ تسهل هذه الطريقة عملية المقارنة بين تكامل ريمان وتكامل ليبيج *Lebesgue* مما يجعل دراسة نظرية التكامل أمرا ميسرا في المستقبل.

ولقد أخذت التطبيقات كذلك حصتها في الباب الثالث حيث وضحنا كيفية استخدام التكامل المحدود في حساب المساحات والحجوم ومساحات السطوح الدورانية وأطوال المنحنيات. ومما يجدر الاشارة إليه أنه في هذا الباب يحتاج الطالب إلى دراية برسم بعض

المنحنيات لذلك مهدنا له بتقديم عرض موجز وكاف لمواضيع منتقاة في الهندسة التحليلية المستوية.

وبالله التوفيق

شعبان ١٤٠٤هـ المؤلفون

المحتـويات

صفحـة

مقدمة الطبعة الثانية ..... هـ

مقدمة الطبعة الأولى ..... ز

الباب الأول: الهندسة التحليلية المستوية

(١-١) المستقيم في المستوي الاحداثي ٥

(١-٢) الدائـــرة ١٣

(١-٣) القطع المكافىء ١٧

(١-٤) القطع الناقص ٢٩

(١-٥) القطع الزائد ٣٧

(١-٦) انسحاب المحاور ٤٧

(١-٧) دوران المحاور في المستوي ٥٧

(١-٨) اللامتغيران في القطوع المخروطية ٦٣

(١-٩) تـمـاريـن عـامـة ٦٧

الباب الثاني: التكامل

(٢-١) نبذة تاريخية ٧٣

(٢-٢) مفهوم المساحة ٧٥

(٢-٣) الدوال الدرجية ٧٩

(٢-٤) جمع وضرب الدوال الدرجية ٨٥

(٢-٥) تكامل الدالة الدرجية ٨٩

(٢-٦) خواص تكامل الدالة الدرجية ٩٣

(٢ـ٧) تكامل الدوال المحدودة ٩٩
(٢ـ٨) أصغر حد أعلى وأعظم حد أدنى ١٠١
(٢ـ٩) التكامل الأعلى والتكامل الأدنى ١٠٥
(٢ـ١٠) مساحة منطقة تحت المنحنى ١٠٧
(٢ـ١١) أصناف من الدوال القابلة للتكامل ١١١
(٢ـ١٢) خواص التكامل ١٢١
(٢ـ١٣) مجموع ريمان ١٣١
(٢ـ١٤) النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل ١٤٧
(٢ـ١٥) رمز ليبنتز للدالة الأصلية ١٥٥
(٢ـ١٦) التكامل بالتعويض ١٥٩
(٢ـ١٧) تمارين عامة ١٧٣

الباب الثالث: بعض التطبيقات على التكامل المحدود

(٣ـ١) مقدمة ١٧٩
(٣ـ٢) مساحة منطقة في المستوي محدودة بمنحنيين أو أكثر ١٨١
(٣ـ٣) حساب الحجم بمعرفة مساحة المقطع ١٨٩
(٣ـ٤) حساب الحجم بطريقة الشرائح الاسطوانية ٢٠٣
(٣ـ٥) طول قوس في مستوي ٢١١
(٣ـ٦) مساحة السطوح الدورانية ٢١٧
(٣ـ٧) معدل الدالة ٢٢٥
(٣ـ٨) تمارين عامة ٢٢٩

الباب الرابع: الدوال اللوغاريثمية والأسية

(٤ـ١) مقدمة ٢٣٥
(٤ـ٢) تعريف وخواص الدالة اللوغاريثمية الطبيعية ٢٣٧
(٤ـ٣) الدالة الأسية وخواصها ٢٥١
(٤ـ٤) الدالة الأسية العامة ٢٥٩
(٤ـ٥) تمارين عامة ٢٦٩

الباب الخامس: الدوال المثلثية والزائدية ومعكوساتها

(٥ـ١) مشتقات وتكاملات الدوال المثلثية ٢٧٧
(٥ـ٢) الدوال العكسية ٢٨٧
(٥ـ٣) الدوال المثلثية العكسية ٢٩٥
(٥ـ٤) مشتقات الدوال المثلثية العكسية ٢٩٩
(٥ـ٥) الدوال المثلثية العكسية كنواتج لتكاملات ٣٠٥
(٥ـ٦) الدوال الزائدية ٣١١
(٥ـ٧) الدوال الزائدية العكسية ٣٢١
(٥ـ٨) تمارين عامة ٣٣١

الباب السادس: طرائق التكامل

(٦ـ١) مقدمة ٣٣٧
(٦ـ٢) التكامل بالتجزيء ٣٣٩
(٦ـ٣) التكامل بالكسور الجزئية ٣٤٩
(٦ـ٤) الصيغ التربيعية ٣٧١
(٦ـ٥) التكاملات المثلثية ٣٧٥
(٦ـ٦) التكامل بالتعويض بالدوال المثلثية ٣٩٣
(٦ـ٧) التعويض بنصف الزاوية ٤٠٩
(٦ـ٨) تعويضات أخرى ٤١٧
(٦ـ٩) التكامل بالتقريب ٤٢٥
(٦ ـ ١٠) الإحداثيات القطبية ٤٣٥
(٦ ـ ١١) تمارين عامة ٤٦١

الباب السابع: الصيغ غير المعينة والتكامل المعتل

(٧ـ١) مقدمة ٤٦٩
(٧ـ٢) الصيغة غير المعينة 0/0 ٤٧١
(٧ـ٣) الصيغة غير المعينة ∞/∞ ٤٨٣
(٧ـ٤) صيغ أخرى غير معينة ٤٩٥
(٧ـ٥) الدوال غير المحدودة على فترة محدودة ٥٠٧

(٧ـ٦) التكامل على فترة غير محدودة ٥١٩
(٧ـ٧) اختبار المقارنة ٥٣١
(٧ـ٨) تمارين عامة ٥٣٩

الملاحق

ملحق (١) الرمز Σ ٥٤٥
ملحق (٢) جدول تكاملات ٥٤٩
ملحق (٣) أجوبة التمارين ٥٥٩

المراجع ٥٧٩

ثبت المصطلحات

(عربي ـ انجليزي) ٥٨٥
(انجليزي ـ عربي) ٥٩١

كشاف الموضوعات ٥٩٧