بسم الله الرحمن الرحيم

حساب التفاضل والتكامل

الجزء الأول

مدخل في حساب التفاضل

الدكتور محمد عادل سودان
الدكتور سلمان بن عبدالرحمن السلمان
الدكتور إبراهيم ديب سرميني

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة الملك سعود
الرياض - المملكة العربية السعودية

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود
ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

ⓒ جامعة الملك سعود، ١٤٢٣هـ (٢٠٠٢م)

الطبعة الأولى : ١٩٨٦م.
الطبعة الثانية : ١٩٨٩م.
الطبعة الثالثة : ١٤١٤هـ (١٩٩٤م).
الطبعة الرابعة : ١٤١٨هـ (١٩٩٧م).

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سودان، محمد عادل

حساب التفاضل والتكامل: الجزء الأول: مدخل في حساب التفاضل/محمد عادل سودان، سلمان عبد الرحمن السلمان، إبراهيم ديب سرميني ط٥(مزيدة ومنقّحة) - الرياض.

٤٤١ص، ٢١سم × ٢٨سم.

ردمك : ٦-٣٥٧-٣٧-٩٩٦٠

١- التفاضل والتكامل أ- السلمان، سلمان بن عبد الرحمن (م. مشارك)

ب- سرميني، إبراهيم ديب (م. مشارك) ج- العنوان

ديوي ١٥ , ٥١٢ ٢٢/٥٦٣٥

رقم الإيداع : ٢٢/٥٦٣٥

تم تحكيم الطبعة الأولى من الكتاب بوساطة لجنة متخصصة، شكّلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس على نشره في اجتماعه الثالث عشر للعام الدراسي ١٤٠٣/١٤٠٤هـ والمنعقد في ١٤٠٤/٨/٢٦هـ الموافق ١٩٨٤/٥/٢٧م. ووافق المجلس العلمي على إعادة طباعته للمرة الخامسة في اجتماعه العاشر للعام الدراسي ١٤٢١/١٤٢٢هـ والمنعقد في ١٤٢١/٩/١٤هـ الموافق ٢٠٠٠/١٢/١٠م

النشر العلمي والمطابع ١٤٢٣هـ

مقدمة

الحمدلله والصلاة والسلام على رسول الله المرسل هداية للعالمين وبعد.

نضع هذا الكتاب بين يدي القارىء وقد سميناه «مدخلاً في حساب التفاضل» وهو الجزء الأول من مجموعة كتب في التفاضل والتكامل يقوم بعض أساتذة قسم الرياضيات في جامعة الملك سعود بتأليفها.

لقد سميناه «مدخلاً في حساب التفاضل» دلالة على أنه الخطوة الأولى في دراسة التفاضل والتكامل وهوبصورة خاصة يهتم بحساب التفاضل.

ولا ندَّعي أننا أحطنا بهذا الكتاب كل أبحاث التفاضل دقة وتفصيلاً أوعلى الأقل ما يطلب من خريج المرحلة الأولى الجامعية معرفتة من هذه الأبحاث بل قدمنا الشيء الضروري من هذا الموضوع ليصبح القارىء قادراً على الانطلاق في أبحاث التفاضل والتكامل.

ولقد حاولنا جهدنا أن نقدم براهين النظريات بأسلوب سهل ومقبول وإذا وجدنا من المتعذر تقديم برهان نظرية في هذا المستوى قدمنا نصها وذكرنا أننا نقبلها هنا دون برهان وسيقدم البرهان في مستوى أعلى من هذا الكتاب.

ولعلمنا أن المحاكمات الرياضية محاكمات منطقية جعلنا الفصل الأول من هذا الكتاب منطقاً رياضياً ولم نهدف من ذلك أن نقدم للقارىء منطقاً رياضياً متكاملاً بل كل ما قصدناه من ذلك هوتقديم أداة تيسر كثيراً من النصوص الرياضية وتساعد على حسن إدراكها وإعادة تصورها.

ولقناعتنا أن نظرية المجموعات خير منطلق ينطلق منه دارس الرياضيات، جعلنا الفصل الثاني من هذا الكتاب حاوياً على مبادىء أولية وموجزة من هذه النظرية.

يمكن للقارىء الذى لديه إلمام بهذين الموضوعين تجاوز هذين الفصلين على أن يطلع فقط على الرموز التي استخدمت فيها سواء أكانت رموزاً منطقية أم كانت رموز نظرية المجموعات.

خصصنا الفصل الثالث لدراسة الدوال الحقيقية لأنه سيقع اهتمامنا، حصراً، عند دراسة

التفاضل، على الدوال الحقيقية وبشكل خاص على دوال معرَّفة على فترة أو اتحاد فترات حقيقية.

نأمل ألا يبدو الأمر غريباً عند رؤية اهتمامنا بالقيمة المطلقة للأعداد الحقيقية وحل المتباينات (المتراجحات) في الفصل الثالث لأننا، كمدرسين، نعاني صعوبات كثيرة من سوء فهم الطلاب لهذين الموضوعين وتعثرهم المستمر في معالجة القضايا الرياضية التي تدخل فيها القيمة المطلقة أوتحتاج دراستها لحل متباينة فيها قيم مطلقة بالإضافة إلى أن هذه المواضيع مستند كبير في دراسة النهايات.

نعلم أن المعالجة الحديثة للدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية تقوم على حساب التكامل ومع ذلك فقد رأينا من المفيد، دراسة هاتين الدالتين بإيجاز بطرق تفاضلية بحتة يمكن الاستفادة منها قبل دراسة التكامل.

رأينا من الأمور الأساسية أن نذكر بعض تطبيقات التفاضل في العلوم الأخرى فجعلنا الفصل الأخير من هذا الكتاب خاصاً بتطبيقات ميكانيكية وفيزيائية واقتصادية.

حاولنا تقديم مجموعة متكاملة من التمارين داخل الفصل أو في نهايته، تغطي كل فقرات هذا الفصل. قد يبدو لبعضهم أن عدد التمارين كبير ولكن ليس المقصود هو حل كل التمارين بل المقصود هو تنوعها وأن يكون بين يدي القارىء المستزيد، عدداً كافياً منها.

لقد كان مرجعنا الأول من أجل مصطلحات هذا الكتاب، ما أقرته مؤتمرات التعريب التي أقامها مركز التعريب في الرباط وهو مؤسسة تابعة لجامعة الدول العربية، فإن لم نجد فيه ما نبتغية، عمدنا إلى مصطلحات التعليم الثانوي في المملكة العربية السعودية وإلا اجتهدنا وأخذنا مصطلحاً مستخدماً في أحد الأقطار العربية.

سيجد القارىء في نهاية هذا الكتاب ثبتاً للمصطلحات الرياضية التي استخدمت في هذا الكتاب باللغتين العربية والإنجليزية، قد يجد فيه فائدة فيما إذا أراد المطالعة في بعض الكتب الأجنبية.

ولقد زودنا هذا الكتاب بملخصات عما رآه القارئ في دراسته الثانوية من قوانين مثلثية وهندسية تذكّره وتغنيه في كثير من الأحيان، عن العودة إلى كتبه السابقة.

كما أننا وضعنا في نهاية هذا الكتاب مسرداً بالرموز الرياضية التي استخدمت فيه.

وقد أضيف إلى الكتاب في طبعته الثالثة فصل جديد بعنوان «القطوع المخروطية»، كما زود الكتاب بمزيد من نماذج الاختبارات النهائية والفصلية التي أعطيت خلال العامين السابقين.

أما الطبعة الرابعة فهي طبعة منقحة تستجيب شكلا ومضمونا مع المستجدات التي يتطلبها القارئ، ولعل من أهم ملامح التجديد في هذه الطبعة ما يلي :

١ - تعزيز الكتاب بمزيد من الأمثلة .

٢ - تعديل براهين بعض النظريات .

٣ - إضافة المزيد من تطبيقات التفاضل إلى الفصل الأخير لتشمل معدلات التغير وإبراز موضوع الأمثلية لما له من فوائد جمة في الوقت المعاصر .

أما أهم ملامح التعديلات على الطبعة الخامسة فهي كما يلي :

١ - حذف بعض البنود من فصول الكتاب والاستعاضة عنها بما هو أكثر فائدة .

٢ - حذف أو إضافة بعض النظريات .

٣ - إعادة صياغة بعض النظريات والتعاريف والنتائج والأمثلة .

٤ - تعزيز الكتاب بتمارين متنوعة جديدة .

٥ - إعادة توزيع التمارين في الكتاب بشكل أفضل لكي يخدم العملية التعليمية .

٦ - إجراء التصويبات المطبعية في الطبعة السابقة .

نأمل أن نكون قد وفقنا إلى الصواب وأن يكون الكتاب في ثوبه الجديد خير عون لطالب العلم وبخاصة طلاب المستويات الأولى في الكليات العلمية كالعلوم، والهندسة، والحاسب الآلي والزراعة، وطلاب الكليات الصحية، والكليات التقنية وكليات المعلمين بل لعل فائدته تمتد لتشمل خدمة طلاب بعض الأقسام في كليات أخرى مثل كلية العلوم الإدارية ونحوها . كما أن الكتاب يتوخى أن يكون مرجعا شافيا لمن أراد التوسع في دراسته من طلاب المرحلة الثانوية - القسم العلمي .

هذا وندين بالشكر الجزيل لجميع زملائنا في قسم الرياضيات الذين قاموا بتدريس الكتاب في طبعته الرابعة وأهدوا لنا النصح والمشورة وقد كانت معظم مقترحاتهم محل اهتمامنا فجزاهم الله خير الجزاء . وإننا ننتظر مستقبلا من كل قارئ لكتابنا هذا أن لا يبخل علينا بمقترحاته وملحوظاته البناءة . وإننا نصبوا دائما إلى بلوغ الأفضل ونؤمن أن النقص من صفات البشر وأن الكمال لله وحده . والله نسأل أن يحقق للجميع الخير والفلاح في الدين والدنيا .

المؤلفون

المحتويات

صفحة

مقدمة ..... هـ

الفصل الأول: المنطق الرياضي

(١-١) تمهيد ١

(١-٢) التقرير ١

(١-٣) نفي التقرير ٢

(١-٤) التقرير المركب وأدوات الربط ٣

(١-٥) التقارير المتكافئة منطقيا ٥

(١-٦) الاقتضاء الرياضي (أو المنطقي) ٦

تمارين ٨

الفصل الثاني: المجموعات

(٢-١) تمهيد ١١

(٢-٢) رمزا الانتماء والاحتواء ١١

(٢-٣) رمز الشمول والوجود ١٢

(٢-٤) المجموعة الجزئية ١٣

(٢-٥) مجموعة القوة ١٥

(٢-٦) العمليات على المجموعات ١٦
(٢-٧) المجموعة الشاملة ١٦
(٢-٨) المجموعات العددية ١٩
تمارين ٢٠
(٢-٩) الضرب الديكارتي لمجموعتين ٢١
(٢-١٠) العلاقات الثنائية ٢٣
(٢-١١) التطبيق (الراسم) ٢٦
(٢-١٢) أنواع التطبيق ٣١
(٢-١٣) معكوس التطبيق ٣٣
(٢-١٤) تركيب تطبيقين ٣٥
(٢-١٥) العملية الثنائية ٣٨
(٢-١٦) علاقة الترتيب ٤١
تمارين ٤٣
(٢-١٧) الفترات في $\mathbb{R}$ ٤٥
(٢-١٨) القيمة المطلقة ٤٥
(٢-١٩) المتباينات ٤٦
(٢-٢٠) حل المتباينات بطريقة الجدول ٥٢
(٢-٢١) المتباينات من الدرجة الثانية ٥٤

الفصل الثالث: الدوال الحقيقية

(٣-١) الدالة الحقيقية ٦٩
تمارين ٧٧
(٣-٢) الدالة في جوار نقطة ٧٩

(٣-٣) الدالة المحدودة ٨١
(٣-٤) الدوال الزوجية والدوال الفردية ٨١
(٣-٥) الدالة الدورية ٨٢
(٣-٦) بيان دالة ٨٣
(٣-٧) انسحاب منحنى باتجاه أحد المحورين الإحداثيين ٨٦
(٣-٨) مقصور دالة ٨٨
تمارين ٩١

الفصل الرابع: النهايات

(٤-١) تمهيد ٩٣
(٤-٢) نهاية متتالية ٩٥
(٤-٣) نهاية دالة ٩٨
(٤-٤) النهاية عن اليمين والنهاية عن اليسار ١٠٥
(٤-٥) خواص النهايات ١٠٩
(٤-٦) نهاية كثيرة حدود ١١٣
(٤-٧) نهاية الدوال المثلثية ١١٤
(٤-٨) نهاية $\frac{\sin x}{x}$ عندما يسعى x نحو الصفر ١١٦
(٤-٩) توسيع مفهوم النهاية ١١٨
(٤-١٠) أوضاع عدم التعيين ١٢٤
تمارين ١٣٥

الفصل الخامس: الاتصال

(٥-١) تمهيد ١٤١
(٥-٢) اتصال (استمرار) دالة ١٤٢

(٥-٣) خواص الدوال المتصلة ١٤٤
(٥-٤) الدالة غير المتصلة عند نقطة..... ١٤٦
(٥-٥) الاتصال عن اليمين والاتصال عن اليسار ١٤٧
(٥-٦) الاتصال على فترة ١٤٨
(٥-٧) خواص الدالة المتصلة على فترة مغلقة..... ١٤٨
تمارين ١٥٣

الفصل السادس: المشتقات

(٦-١) تمهيد ١٥٧
(٦-٢) مشتقة دالة ١٥٨
(٦-٣) إيجاد تغير دالة..... ١٦٤
(٦-٤) تفاضل دالة ١٦٨
(٦-٥) خواص المشتقات ١٧١
(٦-٦) مشتقة دالة التركيب (قاعدة السلسلة) ١٧٥
(٦-٧) مشتقات الدوال الضمنية..... ١٧٧
(٦-٨) مشتقة الدالة العكسية..... ١٨٢
تمارين ١٨٧
(٦-٩) الدوال المثلثية ١٩٢
(٦-١٠) الدوال المثلثية العكسية ١٩٦
(٦-١١) المنحنيات الوسيطية ٢٠٣
تمارين ٢٠٨
(٦-١٢) المشتقات والتفاضلات من مراتب عليا ٢١١
تمارين ٢١٨

تمارين عامة ٢١٩

الفصل السابع: دراسة تغيرات الدوال

(٧-١) دراسة تغير دالة عددية ٢٢١

(٧-٢) نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة ٢٢٦

تمارين ٢٣٢

(٧-٣) الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة - القيم العظمى

والصغرى المحلية ٢٣٤

(٧-٤) التقعر والتحدب - نقطة الانعطاف (الانقلاب) ٢٤٦

تمارين ٢٥١

(٧-٥) أوضاع عدم التعيين - قاعدة لوبيتال ٢٥٤

(٧-٦) أوضاع عدم التعيين $\left[\frac{0}{0}\right]$ ، $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ٢٥٥

تمارين ٢٥٨

الفصل الثامن: المستقيمات المقاربة ورسم المنحنيات

(٨-١) المستقيمات المقاربة لمنحنى في المستوى الإقليدي ٢٦١

(٨-٢) بيان دالة (المنحني البياني لدالة) ٢٦٨

تمارين ٢٨٣

تمارين عامة ٢٨٤

الفصل التاسع: الدوال: الأسية، اللوغاريتمية والزائدية

(٩-١) تمهيد ٢٨٩

(٩-٢) الدوال الأسية واللوغاريتمية ٢٩٠

(٩-٣) الدوال الزائدية ٢٩٩

(٩-٣) الدوال الزائدية العكسية ٣٠٧
تمارين ٣١٢

الفصل العاشر: تطبيقات في حساب التفاضل

(١٠-١) معدلات التغير ٣١٧
(١٠-٢) تطبيقات فيزيائية ٣٢٢
(١٠-٣) تطبيقات هندسية ٣٢٨
(١٠-٤) تطبيقات اقتصادية ٣٣٣
(١٠-٥) الأمثلية ٣٣٦
تمارين ٣٤٥

الفصل الحادي عشر: القطوع المخروطية

(١١-١) القطع المكافئ ٣٤٩
(١١-٢) القطع الناقص ٣٥٤
(١١-٣) القطع الزائد ٣٦٠
تمارين ٣٦٥
(١١-٤) الأشكال المختلفة للقطوع المخروطية في حالتها الانسحابية ٣٦٦
تمارين ٣٧٥
نماذج امتحانات ٣٧٧
إجابات نماذج الامتحانات ٤٠١

ملحق: تذكرة ببعض القضايا من منهاج المرحلة الثانوية

الدوال المثلثية ٤٠٣

القوانين المثلثية الشهيرة ٤٠٤
قوانين التحويل ٤٠٥
مجموعة الحل لبعض المعادلات المثلثية ٤٠٧
الخطوط المستقيمة والدائرة في المستوي ٤٠٧
انسحاب المحاور الإحداثية ٤١١

المراجع ٤١٩
مسرد الرموز ٤٢١
ثبت المصطلحات
أولا: عربي - إنجليزي ٤٢٥
ثانيا: إنجليزي - عربي ٤٣٣