بسم الله الرحمن الرحيم

المدخل الى التحليل الرياضى

الدكتور خضر حامد الأحمد

استاذ الرياضيات — كلية العلوم

جامعة الرياض

الناشر: عمادة شؤون المكتبات ـ جامعة الرياض ـ الريـاض،

ص.ب: ٢٤٥٤ الرياض ـــ المملكه العربية السعودية

الرياض

١٣٩٩هـ

١٩٧٩م

المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

إن الهدف الرئيسي لهذا الكتاب يكمن في تقديم المواضيع الأساسية للتحليل الرياضي بأسلوب معاصر ، وتمهيد السبيل لملء الفجوة الفاصلة ما بين أوليات التحليل الحقيقي ، التي يعرض لها الطالب من خلال دراسته لمبادىء علم التفاضل والتكامل ، وبين البحوث المتقدمة في التحليل الرياضيّ . وقد جَهِدَ المؤلف في إخراج الكتاب ، بحيث يتمكن القارىء من استجلاء القدرة غير المحدودة التي يمتلكها أسلوب المسلمات Axiomatic Method في تطوير علم الرياضيات . وبحيث يتعود الطالب على انتهاج هذا الأسلوب الذي يعتبر بحق من أهم ما جاد به الفكر الرياضي على مر العصور ، الأمر الذي يؤدي في نهاية المطاف إلى نبذ القارىء للعديد من المعتقدات الحدْسيَّة ، التي ربما يكون قد آمن بها في سياق دراسته لرياضيات المرحلة المدرسية ، بل لرياضيات السنة الجامعية الأولى .

يتألف الكتاب من ثمانية فصول . أما الفصل الأول ، فيتناول مبادىء نظرية المجموعات والعلاقات والدوال . ويجدر الاعتراف بأن معالجة نظرية المجموعات لم تستند إلى أسلوب المسلمات ، ذلك أن اعتماد هذا الأسلوب في نظرية المجموعات في هذه المرحلة بالذات ، من شأنه تشويش القارىء بدلاً من الأخذ بيده لاستيعاب بعض قوانينها . التي لا يمكن بدونها فهم الفصول التالية التي صيغت بلغة المجموعات . لذا ، يمكن القول إن الفصل الأول هو بمثابة معجم للمصطلحات الواردة في الفصول اللاحقة .

وأما الفصل الثاني ، فيبحث — بشيء من الإسهاب — في نظرية الأعداد الحقيقية ، باعتبارها حقلاً مرتباً تاماً . ففضلاً عما لهذه النظرية من عميق الأثر في استيعاب الفضاءات المترية ، فإنني أعتقد بأن كثيراً من العقبات التي تحول بين الطالب وبين تمكنه من العديد من مواضيع التحليل ، منشأها عدم الإحاطة بخواص العدد الحقيقي ، بل وعدم الوقوف الصحيح على معنى العدد الحقيقي .

وأما الفصل الثالث،الذي يعتبر من أهم فصول الكتاب ، فيبحث في نظرية الفضاءات المترية . ويعود السبب في إدراج هذا الفصل في موقع متقدم من الكتاب ، الى أن دراسة التحليل الحقيقي من خلال الفضاءات المترية تتطلب جهداً ووقتاً يعادل تقريباً ما يحتاجه الطالب لدى دراسته للتحليل في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$ ، فضلاً عن أن إدراكه للمفاهيم الأساسية في التحليل الحقيقي يغدو أشمل وأعمق . كذلك ، فإن التعرف على الفضاءات المترية يؤهل القارىء لاستيعاب موضوع التوبولوجيا العامة بصورة أفضل وأسرع ، ذلك أن الفضاء المترى هو فضاء توبولوجي خاص .

وقد أفردنا الفصل الرابع لدراسة نهايات الدوال من فضاء متري إلى آخر ، ثم انتقلنا إلى نهايات الدوال والمتواليات الحقيقية بشيء من الإسهاب . ولما كانت النهايتان العليا والدنيا **lim inf , lim sup** لدالة حقيقية تشكلان أداتين على درجة عالية من الفعالية لكل من يود التعمق في التحليل الحقيقي ، فقد أوردنا في هذا الفصل تعريفها وبعضاً من أهم خواصها .

وفي حين تناولنا في الفصل الخامس استمرار الدوال من فضاء متري الى آخر ، فإننا قصرنا الفصل السادس على دراسة استمرار الدوال الحقيقية ، واستخلصنا فيه النظريات الأساسية في الاستمرار التي يعالجها عادة التحليل الحقيقي التقليدي . وفي مقدمتها نظرية القيمة المتوسطة **Intermediate Value**،ونظرية القيمة الأكبر والقيمة الأصغر **Maximum and Minimum Value**،ونظرية التقارب المنتظم **Uniform Convergence**،ونظرية الاستمرار المنتظم **Uniform Continuity** .

ولما كان الإدراك السليم للمفاهيم الأساسية لعلم التفاضل والتكامل شرطاً ضرورياً لكل من أراد السير قدماً في موكب التحليل الرياضي ، فقد أوردنا فصلاً في المفاضلة وآخر في المكاملة .

فأما الفصل السابع الذي كرسناه للمفاضلة ، فيمكننا القول بأن الهدف منه يكاد يكون اشتقاق النظريات الأساسية . التي سبق وتعرف القارىء عليها في سياق دراسته الأولى لمبادىء علم التفاضل ، بيد أن البراهين هنا تمتاز بدقتها النظرية استناداً إلى النتائج التي استنبطناها في الفصول السابقة .

وأما الفصل الثامن والأخير ، فيبحث في المكاملة . وأود الإشارة في هذا الصدد الى رأي للعالم الكبير **ديودونيه Dieudonné**، في كتابه الرائع **Foundations of Modern Analysis**،يتلخص في أنه « لولا الأسم المرموق الذي يُنسَب إليه تكامل ريمان (أي اسم العلامة ريمان **Riemann**) ، لعفا الزمن على هذا التكامل منذ عهد بعيد » . ولا شك في أن **ديودنيه** على حق فيما يقول بعد الثورة العارمة ، التي خلفتها نظرية القياس والمكاملة والتي يعتبر **لوبيغ Lebesgue** ، قائد مسيرتها . ورغم هذا،فانني أعتقد بأنه من الصعوبة بمكان على الطالب استيعاب نظريات المكاملة الحديثة ، دون الارتقاء اليها بدءاً من تكامل ريمان . فضلاً عن أن السير على هذا المنوال،الذي يعكس التسلسل التاريخي في اكتشاف نظريات المكاملة المختلفة . يطلع الطالب على الرابطة بينها . ولهذا السبب ، اقتصرنا هنا على إدراج تكامل ريمان من خلال تعريفنا لمجموعي داربو **Darboux** الأعلى والأدنى . وكان من الممكن في هذا المقام ، تعريف تكامل ريمان بطرق أخرى تمتاز عن طريقة داربو بسهولة تعميمها عند الانتقال الى تكامل ريمان ـــ ستيلتجس **Stieltjes** ، بيد أننا آثرنا تعريف داربو لاعتقادنا بأنه الأسهل .

وتجدر الإشارة إلى خلو الكتاب من بعض المواضيع الأساسية ، تأتي في مقدمتها السلاسل اللامنتهية ، والتكاملات المضاعفة . وتحليل الدوال الحقيقية على $\mathbb{R}^n$. ورغم أن إدراج هذه المواضيع في الكتاب تغنيه دون ريب ، إلا أن حجمه يتجاوز عندئذ الحدود التي رسمناها له .

هذا وأود أن أشير إلى واحدةٍ من السمات المميزة لكتابي هذا ، ألا وهي خلوّه من أي شكل هندسي ، الأمر الذي يترتب على التمسك الصارم بأسلوب المسلمات الذي أضفى على الكتاب مسحة تحليلية صرفة ، بحيث لم يعد القارىء بحاجة إلى ما يسميه ديودونيه «الحدس الهندسي» Geometric Intuition . وإنني أدرك تماماً أن هذا الأمر سيعرضني للنقد من قبل بعض السادة الزملاء ، لاسيما وأن الكتاب ابتدائي في مضمونه . وأنا أعترف بعجزي عن تقدير مدى الربح والخسارة بالنسبة للطالب من جراء هذا المسلك ، إلا أنه أسلوب أرتضيته لكتابي ، والله من وراء القصد .

ورغبة منا في مساعدة القارىء عند الرجوع إلى المصادر المكتوبة باللغة الإنجليزية ، فقد أوردت في آخر الكتاب ثبتاً بالمصطلحات الواردة فيه مرتبة وفق حروف الهجاء العربية ، مع مقابل كل منها باللغة الإنجليزية ، كما أوردت أيضاً مسرداً لأهم الرموز المستخدمة مع ما يعنيه كل منها باللغة العربية . وقد بسطت في الصفحة ٢٨٩ قائمة بأهم المراجع المستعان بها لدى وضع الكتاب .

وفي الختام ، فإنه يطيب لي أن أتوجه إلى الأخوة الزملاء في قسم الرياضيات بجامعة الرياض . وبخاصة رئيس القسم الأستاذ الدكتور سيد قاسم حسين ، بجزيل الشكر على ما لقيته منهم من تشجيع ونصائح أفدت منها الى أبعد الحدود . الأمر الذي كان له الأثر الكبير في خروج هذا الكتاب إلى حيز النور .

المؤلف

خضر حامد الأحمد

الرياض في ١٣٩٨/٥/٢ هـ
١٩٧٨/٤/٩ م