





# الأساليب الرياضية للاقتصاديين

تأليف

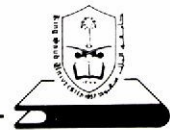
**الدكتور مختار محمد متولي**

أستاذ الاقتصاد بجامعة الملك سعود (سابقاً)

أستاذ الاقتصاد بجامعة ولنجنج بأستراليا (حالياً)

عمادة شؤون المكتبات - جامعة الملك سعود

ص.ب ٢٢٤٨٠ الرياض ١١٤٩٥ - المملكة العربية السعودية



© ١٩٩٣م جامعة الملك سعود

جميع حقوق الطبع محفوظة. غير مسموح بطبع أي جزء من أجزاء هذا الكتاب، أو تخزينه في أي نظام لحزن المعلومات واسترجاعها، أو نقله على أية هيئة أو بآية وسيلة سواء كانت إلكترونية أو شرائط ممغنطة أو ميكانيكية، أو استنساخاً، أو تسجيلاً، أو غيرها إلا بإذن كتابي من صاحب حق الطبع.

الطبعة الأولى ١٤١٤هـ (١٩٩٣م).

متولي، مختار محمد	٣٣٠,١٥٤٣
	م ٢٠٠
الأساليب الرياضية للاقتصاديين / مختار محمد متولي ..	
ط ١. - الرياض: جامعة الملك سعود، عمادة	
شئون المكتبات، ١٤١٤هـ / ١٩٩٣م.	
٥٤٣ ص؛ ٢٤×١٧ سم	
ردمك ٦ - ١٠ - ٠٥ - ٩٩٦٠ (غلاف)	
٤ - ١١ - ٠٥ - ٩٩٦٠ (جلد)	
١ - الاقتصاد الرياضي . ١ . العنوان	

رقم الإيداع: ١٤/٠٥٤. بتاريخ ١٤/٥/١٤١٤هـ

تم تحكيم الكتاب بواسطة لجنة متخصصة شكلت بناءً على قرار المجلس العلمي في اجتماعه الثاني عشر للعام الدراسي ١٤٠٦/١٤٠٧هـ المقفود في ١٤/٨/١٤٠٧هـ الموافق ١٢/٤/١٩٨٧م.

مطابع جامعة الملك سعود ١٤١٤هـ



## تمهيد

لقد شهدت العلوم الاقتصادية والإدارية تطوراً كبيراً منذ أكثر من نصف قرن . فقد أصبح الأسلوب الكمي هو السمة الغالبة على البحوث كافةً في هذا المجال في العالم الغربي . وليس من المبالغ فيه القول بأنه قلما يوجد مقال منشور في المجالات العلمية العالمية المتخصصة يخلو من استخدام التحليل الكمي .

بل إن الأساليب الرياضية التي تستخدم في التحليل الاقتصادي قد تطورت وتعمقت إلى حدود بعيدة خلال السنوات القليلة الماضية . إلا أن أسلوب التحليل في العالم العربي ما زال يتميز بالوصفية مما سلبه القدرة على الإضافة الحقيقية لرصيد العلم .

ولكن ظهر في الآونة الأخيرة بعض الباحثين العرب الذين يحاولون سد هذه الفجوة بالتركيز على استخدام الأسلوب الرياضي في التحليل الاقتصادي والإداري ، رغم الصعوبات والعوائق التي يجدونها من جانب المدرسة الوصفية التقليدية .

ويحاول هذا الكتاب أن يساعد المَدْرَسَةَ الكميّة الحديثة في تحقيق أهدافها . إذ يحتوي على الأساس النظري اللازم لتطبيق الأسلوب الكمي في التحليل . ويشمل هذا الأساس الأساليب الرياضية الشائعة الاستعمال في العلوم الاقتصادية والإدارية .

ويتميز هذا الكتاب عن غيره من الكتب العربية التي كتبت في المجال نفسه في شموليته وعمقه وأسلوبه. فهو يتميز عن غيره فيما يعرضه من أساليب رياضية إذ لا يقتصر فقط على تقديم الأساليب المتقدمة التقليدية وإنما يتناول أيضاً التطورات الحديثة في هذه الأساليب.

كما أن هذا الكتاب لا يتناول مجرد المبادئ والبدييات وإنما يتعمق في تحليل الموضوعات ليعطي القارئ فهماً حقيقياً للأساليب الرياضية بالإضافة إلى تقديم إثباتات واضحة لكل نظرية أو قاعدة أو نتيجة حتى لا يصبح الأمر مجرد تقليد في تطبيق هذه الأساليب دون معرفة للأساسيات.

بالإضافة إلى ذلك يتميز أسلوب هذا الكتاب بالبساطة حتى يتمكن القارئ من متابعة الشرح والنقاش دون عناء كبير. ويبدأ عرض الموضوع بالمبادئ الأساسية ثم يتعمق تدريجياً للوصول إلى المراحل المتقدمة.

ويختلف هذا الكتاب أيضاً عن غيره من الكتب في أنه بالإضافة إلى شموليته وتعمقه في تناول الأساليب الرياضية يعطي العديد من التطبيقات لكل من هذه الأساليب في المجالات المختلفة للعلوم الاقتصادية والإدارية. كما يعطي الكتاب الكثير من الأمثلة النظرية والتطبيقية وبذلك يضع أمام القارئ صورة شاملة وواضحة للأساس النظري وكيفية تطبيقه.

ونأمل أن يفيد هذا الكتاب قارئه سواء كان طالباً أو باحثاً في استخدام الأسلوب الكمي لفهم وصياغة وتطوير النظرية الاقتصادية ومبادئ العلوم الإدارية. وبصفة خاصة سوف يجد طالب الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي وبحوث العمليات والسياسات الإدارية والمالية في محتويات هذا الكتاب متطلبات أساسية لموضوع تخصصه. كما سوف يجد الباحثون في علوم الاقتصاد والإدارة الذين ينتمون إلى المدرسة الكمية الحديثة أن موضوعات هذا الكتاب سوف تساعد كثيراً في تحديد أهداف البحث وتخطيطه وشرح نتائجه وبناء توصياته.

ز

تمهيد

ولا تحتاج قراءة هذا الكتاب إلى متطلبات مسبقة سوى الرياضيات المدرسية .  
لذلك يمكن للطالب الجامعي أن يبدأ به كأساس للدارسات الكميّة في التخصصات  
الاقتصادية والإدارية .  
والله الموفق ، ، ،

مختار محمد متولي





## المحتويات

صفحة

هـ	تمهيد
ط	المحتويات
	الفصل الأول: المصفوفات والمُحدِّدات
١	(١ - ١) تعريف المصفوفة
٦	(٢ - ١) العمليات الجبرية على المصفوفات
١٨	(٣ - ١) المُحدِّدات
٣٦	(٤ - ١) رتبة المصفوفة
٤٠	(٥ - ١) مقلوب أو معكوس المصفوفة
	(٦ - ١) تطبيقات اقتصادية:
٥٢	(١ - ٦ - ١) تحليل المستخدم / المنتج
٥٣	(٢ - ٦ - ١) مصفوفة التحويلات
٥٧	(٣ - ٦ - ١) مصفوفة المعاملات الفنيّة
	(٤ - ٦ - ١) استخدام المصفوفات في حل جداول المستخدم /
٦٠	المنتج
٦٥	(٥ - ٦ - ١) مضاعفات المستخدم / المنتج
٧١	(٧ - ١) صيغة أشلن الصفيّة
٧٤	(٨ - ١) حل المعادلات الخطية الآنية

## صفحة

	(٩ - ١) تطبيقات اقتصادية
٨٨	(١ - ٩ - ١) تداخل الأسواق
٩٣	(٢ - ٩ - ١) مُحَدِّدَاتِ الدَّخْلِ القومِي
٩٧	(١٠ - ١) الجذور والمَتَجَهَاتِ المَتمَيِّزَة
١٠١	(١١ - ١) تحديده إشارة الصيغة التربيعية
١٢٠	(١٢ - ١) تمرينات

## الفصل الثاني: حساب التفاضل

١٢٩	(١ - ٢) تعريف معامل التفاضل الأول أو المشتق الأول
١٣٢	(٢ - ٢) إيجاد معامل التفاضل الأول لبعض الدَوَالِّ
١٣٢	(٣ - ٢) بعض قواعد التفاضل
	(٤ - ٢) تطبيقات اقتصادية وإدارية
١٥٢	(١ - ٤ - ٢) التحليل الحَدِّي
١٥٤	(٢ - ٤ - ٢) المرونات
١٥٦	(٣ - ٤ - ٢) العلاقة بين مرونة الطلب والإيراد الحَدِّي
١٥٨	(٥ - ٢) نظرية رول
١٦٠	(٦ - ٢) قانون المتوسط
١٦٢	(٧ - ٢) المُشْتَقَّاتِ (أو معاملات التفاضل) من درجات عليا
١٦٣	(٨ - ٢) نظرية تايلور
١٦٧	(٩ - ٢) النهايات العظمى والنهايات الصغرى
١٦٨	(١ - ٩ - ٢) الشرط اللازم للنهايات
١٦٩	(٢ - ٩ - ٢) الشرط الكافي للنهايات
١٧٥	(١٠ - ٢) مَحْدُبٌ وَتَقَعْرُ المنحنيات
١٧٧	(١١ - ٢) نقطة التحول (أو الانقلاب)
	(١٢ - ٢) استخدام معادلة تايلور في تحديد شروط النهايات العظمى
١٧٨	والصغرى ونقاط التحول

	(٢ - ١٣) تطبيقات اقتصادية: توازن المنشأة	
١٨٣	(٢ - ١٣ - ١) حالة المنافسة الكاملة	.....
١٨٥	(٢ - ١٣ - ٢) حالة الاحتكار الكامل	.....
١٨٧	(٢ - ١٣ - ٣) أثر الضرائب غير المباشرة على توازن المحتكر	.....
١٨٨	(٢ - ١٤) الدوال عديدة المتغيرات	.....
١٨٩	(٢ - ١٥) التفاضل الجزئي من الرتب العليا	.....
١٩١	(٢ - ١٦) التفاضل الكلي	.....
١٩٢	(٢ - ١٧) المشتقة الكلية	.....
١٩٢	(٢ - ١٨) الدوال الضمنية	.....
	(٢ - ١٩) تطبيقات اقتصادية	
١٩٤	(٢ - ١٩ - ١) التغيرات الحدية والسلع المرتبطة	.....
١٩٧	(٢ - ١٩ - ٢) مرونة الطلب الجزئية والسلع المرتبطة	.....
١٩٨	(٢ - ١٩ - ٣) المضاعفات	.....
٢٠١	(٢ - ١٩ - ٤) مضاعف الميزانية المتوازنة	.....
٢٠٥	(٢ - ١٩ - ٥) توازن الطلب الكلي	.....
٢٢٨	(٢ - ٢٠) النهايات العظمى والصغرى للدوال عديدة المتغيرات	.....
٢٣٨	(٢ - ٢١) النهايات العظمى والصغرى للدوال المقيدة	.....
	(٢ - ٢٢) تطبيقات اقتصادية	
٢٦١	(٢ - ٢٢ - ١) توازن المستهلك	.....
٢٦٥	(٢ - ٢٢ - ٢) معادلة سلوتسكي	.....
٢٧١	(٢ - ٢٢ - ٣) دالة الإنتاج ومعامل الإحلال الحدي الفني	.....
٢٧٣	(٢ - ٢٢ - ٤) توازن المنتج	.....
٢٧٦	(٢ - ٢٢ - ٥) دالة الإنتاج المتجانسة	.....
٢٨٢	(٢ - ٢٢ - ٦) مرونة الإحلال	.....
٢٨٧	(٢ - ٢٢ - ٧) مرونة الإحلال لدوال الإنتاج المتجانسة	.....
٢٨٩	(٢ - ٢٢ - ٨) دالة إنتاج كوب - دوغلاس	.....

## صفحة

٢٩٢	..... دالة إنتاج C.E.S. (٢ - ٢٢ - ٩)
٢٩٨	..... تمرينات (٢ - ٢٣)

## الفصل الثالث : البرمجة غير الخطية (شروط كيون تاكر)

٣٠٧	..... مقدمة (٣ - ١)
٣٠٩	..... شروط كيون تاكر للنهايات العظمى (٣ - ٢)
٣١٣	..... شروط كيون تاكر للنهايات الصغرى (٣ - ٣)
٣١٧	..... تطبيقات اقتصادية : شروط كيون تاكر وتوازن المنشأة (٣ - ٤)
٣٢٥	..... تمرينات (٣ - ٥)

## الفصل الرابع : مقدمة في حساب التكامل

٣٢٧	..... تعاريف (٤ - ١)
٣٢٩	..... بعض قواعد التكامل (٤ - ٢)
٣٣٥	..... التكامل بالتعويض (٤ - ٣)
٣٣٧	..... التكامل بالتجزئة (٤ - ٤)
٣٣٩	..... ملخص لأهم قواعد التكامل المستخدمة في العلوم الاقتصادية (٤ - ٥)
٣٤١	..... التكامل المُحدّد (٤ - ٦)
٣٤٣	..... معادلة نيوتن - لابينز (٤ - ٧)
٣٤٥	..... بعض خصائص التكامل المُحدّد (٤ - ٨)
٣٤٨	..... التكامل المُتعدّد (٤ - ٩)
	..... تطبيقات اقتصادية (٤ - ١٠)
٣٥١	..... فائض المستهلك (٤ - ١٠ - ١)
٣٥٣	..... فائض المستهلك ومرونة الطلب الثابتة (٤ - ١٠ - ٢)
٣٥٥	..... فائض المنتج (٤ - ١٠ - ٣)
٣٥٦	..... تمرينات (٤ - ١١)

## صفحة

## الفصل الخامس : المعادلات التفاضلية

٣٦١	.....	(١ - ٥) تعاريف
٣٦٤	.....	(٢ - ٥) حل المعادلات التفاضلية
٣٦٥	.....	(٣ - ٥) المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى
٣٧٣	.....	(٤ - ٥) المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية والرتب العليا
٣٨٢	.....	(٥ - ٥) المعادلات التفاضلية الخطية من رتبة $n$
		(٦ - ٥) تطبيقات اقتصادية
٣٨٦	.....	(١ - ٦ - ٥) نموذج هارود - دومار للنمو
٣٨٩	.....	(٢ - ٦ - ٥) نموذج كوب - دوجلاس للنمو
٣٩١	.....	(٣ - ٦ - ٥) نموذج دومر للدين العام
٣٩٣	.....	(٤ - ٦ - ٥) نموذج ايفانس لتكيف السعر
٣٩٥	.....	(٧ - ٥) تمرينات

## الفصل السادس : معادلات الفرق

٣٩٧	.....	(١ - ٦) تعاريف
٣٩٨	.....	(٢ - ٦) معادلات الفرق الخطية بمعاملات ثابتة
٣٩٩	.....	(٣ - ٦) حل معادلات الفرق
٤٠١	.....	(٤ - ٦) حل معادلة الفرق الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى
٤٠٦	.....	(٥ - ٦) حل معادلة الفرق الخطية غير المتجانسة من الرتبة الأولى
٤١٢	.....	(٦ - ٦) حل معادلة الفرق الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية
٤١٧	.....	(٧ - ٦) حل معادلة الفرق الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية
٤٢٠	.....	(٨ - ٦) مشاكل حل معادلات الفرق الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية
		(٩ - ٦) الأعداد المركبة وحل معادلات الفرق الخطية غير المتجانسة من
٤٢٦	.....	الرتبة الثانية
٤٣٦	.....	(١٠ - ٦) حل معادلات الفرق الخطية من رتبة $n$

## صفحة

	(٦ - ١١) تطبيقات اقتصادية
٤٣٨	(٦ - ١١ - ١) ديناميكية السوق (نموذج العنكبوت)
٤٤٣	(٦ - ١١ - ٢) نموذج هارود - دومار للنمو
٤٤٤	(٦ - ١١ - ٣) تداخل المضاعف والمُعجَّل
٤٤٩	(٦ - ١١ - ٤) نموذج للسوق مع وجود مخزون
٤٥١	(٦ - ١٢) تمرينات
	الفصل السابع : البرمجة الخطية
٤٥٥	(٧ - ١) تعاريف
٤٥٧	(٧ - ٢) الحل البياني للبرمجة الخطية
٤٦٣	(٧ - ٣) مبدأ الثنائية
٤٦٦	(٧ - ٤) نحو حل عام لمشاكل البرمجة الخطية : طريقة السمبلكس
٤٨٠	(٧ - ٥) حسابات السمبلكس
٤٨٦	(٧ - ٦) مشكلة الانحلال
٤٨٧	(٧ - ٧) السمبلكس والثنائية
٤٩٤	(٧ - ٨) المدلول الاقتصادي للثنائية
	(٧ - ٩) تطبيقات اقتصادية
٤٩٨	(٧ - ٩ - ١) البرمجة الخطية وتوازن المنشأة
٤٩٩	(٧ - ٩ - ٢) البرمجة الخطية والتجمع الأمثل لعناصر الإنتاج
٥٠٣	(٧ - ٩ - ٣) البرمجة الخطية والتجمع الأمثل للمنتجات
٥٠٦	(٧ - ٩ - ٤) أسلوب التحليل الحدي وأسلوب البرمجة الخطية
٥٠٧	(٧ - ١٠) تمرينات
	الفصل الثامن : نظرية الألعاب
٥١٣	(٨ - ١) تعاريف
٥١٤	(٨ - ٢) مصفوفة الحصيلة
٥١٥	(٨ - ٣) اللعبة ذو القيمة الصفرية
٥١٦	(٨ - ٤) نظرية السرج كحل للعبة المستطيلة

## صفحة

٥١٩	.....	(٥ - ٨) الاستراتيجيات المسيطر عليها
٥٢١	.....	(٦ - ٨) الاستراتيجيات المختلطة
٥٢٣	.....	(٧ - ٨) الحل البياني للعبة
٥٢٦	.....	(٨ - ٨) استخدام البرمجة الخطية في حل اللعبة
٥٢٦	.....	(٩ - ٨) تطبيقات اقتصادية: احتكار القلة لمنشأتين
٥٣٣	.....	(١٠ - ٨) تمرينات
٥٣٧	.....	المراجع
٥٣٩	.....	كشاف الموضوعات