بسم الله الرحمن الرحيم

# الجبر الخطي
## وتطبيقاته

تأليف
**جلبرت سترنج**
أستاذ في معهد ماساشوستس التقني

ترجمة
**الدكتور محمد عادل سودان** **الدكتور حسن محيي الدين حميدة**
قسم الرياضيات - كلية العلوم
جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود
ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

ⓒ جامعة الملك سعود، ١٤٢١هـ (٢٠٠٠م)

هذه ترجمة عربية مصرح بها لكتاب :

*Linear Algebra and Its Applications, 3rd edition.*

By : Gilbert Strang

©1988, Harcourt Brace Jovanovich

*فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر*

سترنج ، جلبرت

الجبر الخطي وتطبيقاته / ترجمة محمد عادل سودان ، حسن محيي الدين حميدة ٠ - ط١ - الرياض

٨٠٠ ص ، ١٧سم×٢٤سم

ردمك : ١-١١٣-٣٧-٩٩٦٠

١-الجبر الخطي أ-سودان ، محمد عادل (مترجم) ب-حميدة ، حسن محيي الدين (مترجم) ج-العنوان

ديوي ٥١٢,٥ ٢١/٠٥٨١

رقم الإيداع: ٠٥٨١ / ٢١

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكّلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس على نشره بعد إطلاعه على تقارير المحكمين في اجتماعه الرابع عشر للعام الدراسي ١٤١٥ / ١٤١٦ هـ المعقود في ١٣/ ٩/ ١٤١٥هـ الموافق ١٢/ ٢/ ١٩٩٥م.

مطابع جامعة الملك سعود

# المحتويات


**مقدمة الترجمة** ..... ط

**المقدمة** ..... م

**الفصل الأول: المصفوفات والحذف الغاوسي** ..... ١

(١-١) تمهيد ..... ١

(١-٢) هندسة المعادلات الخطية ..... ٣

(١-٣) مثال للحذف الغاوسي ..... ١٥

(١-٤) الرمز الممصفوفي وضرب مصفوفات ..... ٢٥

(١-٥) العوامل المثلثية والمبادلات السطرية ..... ٤٢

(١-٦) المعكوس والمنقول ..... ٥٨

(١-٧) مصفوفات خاصة وتطبيقاتها ..... ٧٤

تمارين مراجعة ..... ٨٧

**الفصل الثاني: فضاءات المتجهات والمعادلات الخطية** ..... ٩٣

(٢-١) فضاءات المتجهات والفضاءات الجزئية ..... ٩٣

(٢-٢) حل m معادلة في n مجهول ..... ١٠٥

(٢-٣) الإستقلال الخطي، الأسس والسمة ..... ١١٨

(٢-٤) الفضاءات الجزئية الأربعة الأساسية ..... ١٣٤

(٢-٥) الشبكات ومصفوفات الورود ..... ١٥٢

(٣-٦) التحويلات الخطية
تمارين مراجعة ..... ١٧٤
**الفصل الثالث : التعامد** ..... ١٩١
(٣-١) المتجهات المتعامدة والفضادات الجزئية القائمة ..... ١٩٧
(٣-٢) الجداء الداخلي والإسقاط على مستقيم ..... ٢١٣
(٣-٣) الإسقاط على فضاء جزئي تقريبات المربعات الأصغرية ..... ٢٢٥
(٣-٤) الأسس القائمة، والمصفوفات القائمة، وتقويم غرام-شميدت ..... ٢٤٣
(٣-٥) تحويل فوريه السريع ..... ٢٦٩
(٣-٦) مراجعة وعرض ..... ٢٨٦
تمارين مراجعة ..... ٣٠٧
**الفصل الرابع : المحددات** ..... ٣١٣
(٤-١) تمهيد ..... ٣١٣
(٤-٢) خواص المحددة ..... ٣١٦
(٤-٣) قوانين المحددة ..... ٣٢٨
(٤-٤) تطبيقات المحددات ..... ٣٤٠
تمارين مراجعة ..... ٣٥٥
**الفصل الخامس : القيم الذاتية والمتجهات الذاتية** ..... ٣٥٩
(٥-١) تمهيد ..... ٣٥٩
(٥-٢) الشكل القطري لمصفوفة ..... ٣٧٣
(٥-٣) معادلات الفرق والقوى $A^R$ ..... ٣٨٤
(٥-٤) المعادلات التفاضلية والدوال الأسية $e^{At}$ ..... ٤٠٣
(٥-٥) المصفوفات المركبة : المتناظرة، الهيرميتية، القائمة والواحدية ..... ٤٢٥
(٥-٦) تحويلات التشابه ..... ٤٤٥
تمارين مراجعة ..... ٤٦٨

**الفصل السادس : المصفوفات المعرفة إيجابياً** ..... ٤٧٥
(٦-١) النهاية الصغرى، والنهاية العظمى والنقط السرجية ..... ٤٧٥
(٦-٢) معايير التعريف الإيجابي ..... ٤٨٦
(٦-٣) المصفوفات شبه المعرفة وغير المعرفة؛ $Ax = Mx$ ..... ٥٠٠
(٦-٤) مبادئ النهاية الصغرى ونسبة رايلي ..... ٥١٢
(٦-٥) طريقة العنصر المحدود ..... ٥٢٤
**الفصل السابع : حسابات بالمصفوفات** ..... ٥٣٥
(٧-١) تمهيد ..... ٥٣٥
(٧-٢) نظيم المصفوفة وعددها الشرطي ..... ٥٣٧
(٧-٣) حساب القيم الذاتية ..... ٥٤٨
(٧-٤) الطرائق التكرارية لحل $Ax = b$ ..... ٥٦٣
**الفصل الثامن : البرمجة الخطية ونظرية اللعب** ..... ٥٧٧
(٨-١) المتراجحات الخطية ..... ٥٧٧
(٨-٢) طريقة الإفراد وطريقة كارماكر ..... ٥٨٧
(٨-٣) نظرية الثنوية ..... ٦١٤
(٨-٤) نماذج الشبكة ..... ٦٣٢
(٨-٥) نظرية اللعب ونظرية أصغر القيم العظمى ..... ٦٤٥
**الملحق (أ) التحليل وفق القيمة الشاذة والمعكوس الكاذب** ..... ٦٦٣
**الملحق (ب) شكل جوردان** ..... ٦٨١
**الملحق (جـ) أنظمة حاسوب للجبر الخطي** ..... ٦٩٣
**المراجع** ..... ٧١١
**حلول بعض التمارين المختارة** ..... ٧١٣
**ثبت المصطلحات** ..... ٧٦٣
عربي ـ إنكليزي ..... ٧٦٣
إنكليزي ـ عربي ..... ٧٧٦

# مقدمة الترجمة

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على رسوله الأمين وبعد،

إن من دواعي السرور والبهجة إحداث مركز للترجمة في جامعة الملك سعود العزيزة علينا وهو أمر كنا نتوقعه منذ زمن طويل من هذه الجامعة التي انطلقت انطلاقة إسلامية عربية . كيف لا يكون ذلك في جامعة البلاد التي ولدت فيها العربية وإنتشر فيها ومنها الإسلام العظيم. الشكر الجزيل لجامعة الملك سعود وللقائمين على إدارتها لهذه الخطوة المباركة التي نرجو أن تعطي، بعد عون الله، ثمارها سريعاً فيترسخ التدريس باللغة العربية ،لغة القرآن الكريم وأن تكون فاتحة خير لهذه الأمة ولتقدمها العلمي. ونأمل أن يحذو حذوها جامعات أخرى في المملكة ومن البلاد العربية الأخرى كما نأمل أن تقنع جامعات عربية غير قانعة بإمكان التدريس بلغة بلادها، بأن اللغة العربية لغة واسعة قادرة على إستيعاب جميع العلوم الحديثة، بجهود أبنائها ودأبهم على الترجمة إليها والكتابة فيها. سدد الله الخطى لما فيه خير هذه الأمة المنكوبة من بعض أبنائها.

يحتل الجبر الخطي مكاناً متميزاً في الرياضات المعاصرة؛ فهو أساسي في أغلب البراهين، تقوم عليه الهندسة والجبر و التحليل والميكانيك. و لقد أصبح مستنداً لكثير من الأبحاث الفزيائية واستخدم بشكل واسع في العلوم الأخرى من طبيعية وإنسانية . لقد أصبحت الرياضيات دراسة متجهة، يدخل فيها المتجه وفضاء المتجهات وعملياتها في قاعدة كل فرع من فروعها.

تقوم أكثر الحسابات الرياضية والفزيائية على تطبيقات الجبر الخطي، وإن كثيرامن مسائل الهندسة المعمارية والهندسة الميكانيكية لا يمكن حلهاً حالياً إلا باستخدام فضاء المتجهات ومفهوم المصفوفات وهما مفهومان أساسيان من مفاهيم الجبر الخطي. يمكننا أن نصف العصر الحاضر بأنه عصر الحساب. يدخل الحساب في كل شئ، في حل المسائل الرياضية المعقدة، والمسائل الفيزيائية الدقيقة، في الإقتصاد والإحصاء، في التجارة وإدارة الأعمال. كل ذلك تطبيقات لمفاهيم الجبر الخطي.

و لقد أراد مؤلف هذا الكتاب إستخدام الجبر في كل شئ حتى في تنظيم فرق كرة القدم وفي أغلب الألعاب. لا نريد هنا عرض محتويات هذا الكتاب فإن في مقدمة المؤلف ما يكفي.

لا تزال المكتبة العربية شبه خالية، إن لم نقل خالية تماماً، من كتاب في الجبر الخطي التطبيقي، رغم ما لهذا الموضوع من أهمية كبيرة في خدمة فروع العلم المختلفة. لقد قمنا بتوفيق من الله تعالى، بترجمة هذا الكتاب آملين أن يسد جزءاً ولو يسيراً من الحاجة.

نريد أن نذكر قبل الإنتهاء، بعض الإلتزامات التي أخذنا بها، دون غيرها، خلال الترجمة

١ - إلتزمنا بالمصطلحات التي أقرها مكتب تنسيق التعريب التابع لجامعة الدول العربية، فان لم نجد حاجتنا أخذنا بمصطلحات التعليم الثانوي في المملكة العربية السعودية، و إلا، بمصطلح بلد عربي أو اجتهدنا برأينا آملين أن يكون صائبا.

٢- ترجمنا كلمة corner الإنكليزية، المستخدمة كثيراً في هذا الكتاب بقرنة (قرنات) وهي كلمة عربية حملها مجمع اللغة العربية بالقاهرة، المعنى الجديد الذي نريده وقد استعملت هذه الكلمة في جامعة الرباط.

٣- فضلنا كلمة (متراجحة) على كلمة (متباينة) ترجمةً لكلمة inequality للدلالة على التراجح وتركنا (متباينة) لعدم التساوي الذي رمزه $\neq$.

٤ - ترجمنا كلمة dimension ببعد إذا كانت تخص فضاءاً ذا بعد واحد وبعدد

أبعاد (أو سعة) إذا كانت تصف فضاء متجهات ذا أبعاد متعددة. خاصة وأن الكتاب قد استخدم هذه الكلمة من أجل بعد واحد وذكر فراغاً ذا بعدين وآخر ذا ثلاثة أبعاد.

٥- استخدمنا كتابة الهمزات كما هي مرسومة في القرآن الكريم وذلك إستناداً إلى كتاب الأستاذ الشيخ مصطفى الغلاييني «قواعد اللغة العربية»، بصورة خاصة من أجل كتابة الهمزة المتوسطة التي أصلها متطرفة.

هذا ما أمكننا القيام به، بتوفيق من الله تعالى، نأمل أن يكون عملنا هذا خالصاً لوجهه الكريم وأن يكون مفيداً، والله سبحانه من وراء القصد.

**المترجمان**

**الدكتور محمد عادل سودان و الدكتور حسن محي الدين حميدة**

# المقدمة

يعد الجبر الخطي موضوعاً تصورياً وهو من ناحية أولى جميل وواضح. فإذا كانت لديك ثلاثة متجهات من فضاء ذي ١٢ بعداً، فقد يمكنك إدراكها، لكن من الصعب إدراك تركيب لها مثل : الأول + الثاني - مثلي الثالث، إلا أن ذلك يبقى ممكناً. لا يمكن لأحد أن يتصور جميع التراكيب المماثلة. ولكننا، بطريقة أو بأخرى، سنبدأ بإدراك ذلك في هذا المقرر. حتماً، لا يمكن لتركيبات هذه المتجهات الثلاثة أن تغطي الفضاء ذا الاثني عشر بعداً.

الجانب الآخر للجبر الخطي هو كونه ضرورياً وقابلاً للإستخدام. قبل عشر سنوات، كان يعلم بصورة مجردة وكانت الأهمية الحاسمة لهذا الموضوع مفقودة. لا يمكن لمثل هذا الحال أن يستمر. فقد أصبح الجبر الخطي أساسياً وتطبيقياً مثل حساب التفاضل والتكامل، ولحسن الحظ، فإنه أكثر سهولة؛ وكان لا بد للمناهج من أن تتطور. لقد أصبح الآن من المقبول، بصورة شاملة، أن الجبر الخطي مقرر أساسي ضمن مقررات السنتين الأولى وقبل الأخيرة في الكليات بوصفه متطلباً للهندسة والعلوم، وجزءاً أساسياً من الرياضيات.

هدف هذا الكتاب بيان هاتين الناحيتين معاً - جمال الجبر الخطي وقيمته العلمية.

لن تكون جهودنا مركزة على النظريات وبراهينها رغم وجود ريا ضيات فيها. لن يكون التأكيد على دقة التعبير كبيراً ولكن الإهتمام بالفهم كبير. أحاول التفسير أكثر من الاستنتاج. تقدم الفكرة في الكتاب وكذلك في الدرس، بالأمثلة. سوف

تدرك ذلك عندما تتعامل مع الفضاء الجزئي . سوف تتطور القابلية للمحاكمة الريا ضية إذا أعطيت حقها من العمل . ومع ذلك ، فإن الفكرة الأساسية للجبر الخطي ليست ذات صعوبة كبير ة .

أحب أن أقول ، بوضوح ، أن هذا الكتاب هو كتاب حول الرياضيات ، و ليس كله تعابير مخففة بحيث يفقد غرضه الذاتي . وإني لا أعتقد أن الطالب والأستاذ يريدان منه مقرراً فارغاً ؛ إذ يمكن لثلاث ساعات في الأسبوع أن تنهي كمية لابأس بها شرط أن يساعد الكتاب في إنجاز ذلك . آمل وأعتقد أنك سترى من خلال الأسلوب الشخصي والمألوف لهذا الكتاب ، أنه كتب لتعليم رياضيات حقيقية . كما أن هناك مقاطع يمكنك إهمالها وشروحاً لست بحاجة إليها ، ولكن ، لا يمكنك أن لا تلاحظ القوة الأساسية لهذا الموضوع . إنه ينتقل بصو رة طبيعية وسهلة من المستقيم أو المستوي إلى الفضاء ذي الـ n بعداً $R^n$ . هذه الخطوة ريا ضية على أحسن وجه ويمكن لأي طالب أن يتقبلها .

هناك سؤال يصعب تأ جيل الجواب عنه : كيف ينبغي أن يبدأ المقرر؟ يأتي كثير من الطلاب إلى السنة الأولى وهم يعرفون بعض الشيء عن المعادلات الخطية ، لذا أعتقد أن علينا أن نبدأ بـ n معادلة بـ n مجهولاً ، $Ax = b$ وبالطريقة الأكثر سهولة – الحذف الغاوسي (وليس بالمحددات) . سيكون ذلك مقدمة مثالية لضرب المصفوفات . لحسن الحظ ، حتى لو كانت الطريقة واضحة المعالم ، فإن هناك أفكاراً غريبة وأساسية يطلب فهمها ، وهي جديدة بالنسبة لكل طالب تقريباً . على المرء أن يدرك أنه مثلما انتقل الحذف من المصفوفة الأصلية إلى مصفوفة مثلثية عليا U ، فإن A تصبح محللة الى مصفوفتين مثلثيتين $A=LU$ .

هذه الملاحظة ليست غامضة ومن السهل التحقق من صحتها ، ولها أهمية كبيرة من الناحية العملية . بالنسبة لي إنها أحد مؤشرات مقرر جدي ، إنها الخط الفاصل بين العرض الذي يتعامل مع العمليات السطرية فقط وذلك الذي يستدعي $R^{-1}$ .

هناك مسألة أخرى ، هو إيجاد السرعة الملائمة . إذا كان الحساب المصفوفي

مألوفاً، فإنه ليس من الضروري أن يكون الباب الأول بطيئا جداً. أما الباب الثاني الذي يحتاج إلى عمل أكبر وهذا يعني عملاً من نوع آخر-ليس ذلك إجتراراً للاعداد وهو ما يقوم به الحاسوب، بل فهم للنظام Ax=b الذي يبدأ بالحذف ويتقدم بعمق. على الطالب أن يدرك أن جهاز السرعة قد تغير؛ الأفكار تتقدم. عوضاً عن متجهات قائمة بذاتها، أصبحنا نحتاج الى فضاءات متجهات. إنني على قناعة تامة من أن الفضاءات الجزئية الأربعة - فضاء أعمدة A، فضاء أسطرها و القضائين الصفريين لـ A و $A^T$، هي الطريق الأكثر فاعلية لتوضيح الإرتباط والإستقلال الخطيين وفهم كل من «الأساس» و «عدد الأبعاد». لقد وضحت هذه الأمور بتدرج ولكن بثبات. لقدكونت أمثلة بطريقة طبيعية تماماً وكانت أيضاً أساساً لدراسة Ax=b .يمكننا أن نقدم مثالاً نبين فيه كيف يمكن رؤية فكرة ما بطرق مختلفة؛ إنه الخطوة الأساسية لضرب مصفوفة A بمتجه x. في المستوي الأول، Ax يمثل أعداداً، في المستوي الثاني، سيكون تركيباً لأعمدة A. في المستوي الثالث، إنه متجه من فضاء الأعمدة. (لقد تصورنا فضاء متجهات يحوي جميع التراكيب وليس هذا المتجه فقط). عند الجبريين، A يمثل تحويلاً خطياً و Ax هو ناتج تطبيق ذلك على x. الفضاءات الأربعة كلها مهمة، وعلى هذا الكتاب أن يقوم بالربط فيما بينها.

تعد الفصول من الأول حتى الخامس، فعلاً، قلب مقرر الجبر الخطي. إنها تحوي عدداً كبيراً من التطبيقات الفيزيائية والهندسية، الاحتمالية والإحصائية، الاقتصادية والحياتية. لم تقدم هذه التطبيقات في النهاية بل كانت جزءاً من الرياضيات. لقد كانت الشبكات مصدراً رائعاً للمصفوفات المستطيلة، وبصورة رئيسية، في الهندسة وعلم الحاسوب، وكذلك أمثلة مثالية للتعليم. رغم ما تقدر الرياضيات على فعله ورغم ما يقدر الجبر الخطي على فعله، فإنه من الضروري رؤية النماذج المختبئة، إلى حد ما، في التطبيقات. يستخدم هذا الكتاب الرياضيات البحتة لتعليم الرياضيات التطبيقية. أعتقد أن الكلية قادرة على هذا التحول وأن تعلم ما يحتاجه الطلاب. الجهود حتماً مكافأة.

إذا نظرت في الطبعة السابقة فإنك ستجد تغييراً . البند(١-١) معتاد ولكن الأمر ليس كذلك من أجل البند(٢-١) . من المؤكد أن الروح لم تتغير : هذا المقرر حيوي لأن موضوعه كذلك . بسبب تعليمي إياه باستمرار ، فقد وجدت سلسلة كاملة من التحسينات - قي التنظيم والتمارين (مئات منها جديدة بالإ ضافة إلى سعة مداها) ، والمحتوى ؛ تصبح معظم هذه التحسينات ملموسة من خلال تعليم هذا الموضوع - عند الشرح الصحيح أو التدريب ، يظهر الفرق بين الطبعتين . أذكر تغييرين ظاهرين في الفهرس : لقد دمجت التحويلات الخطية بالنص ووجد بند جديد (إختياري) يتعلق بتحويل فوريه السريع . يمكن أن يكون ذلك هو الخوارزمية البارزة في الرياضيات المعاصرة وهي طريقة رقمية ثورية . إنها ليست سوى طريق سريع للضرب بمصفوفة معيّنة! يمنك أن ترى (كما فعلت أنا) أن هذه الفكرة موجودة ومهمة . من الحبور أن يكتشف المرء كيف تلاء مت هذه الطريقة مع الجبر الخطي . (وكيف أدخلت الأعداد المركبة) .

إن ذلك هو المقرر الأول في الجبر الخطي . فالجانب النظري مبرر ومدعم بتطبيقات أصيلة . في الوقت ذاته ، الهدف واضح والأسباب مبرهنة . بعد أن يتناول الباب الثاني ، بعد الحذف و $A^{-1}$ ، مفهوم فضاء المتجهات ، يتركز الباب الثالث على التعامد . يفهم ذلك ، هندسيا ، قبل القراءة الأولى . من الناحية الجبرية ، الخطوات معتادة ولكنها حاسمة - معرفة متى تكون متجهات متعامدة ومتى يكون فضاءان جزئيان متعامدين أوكيف يسقط على فضاء جزئي أو كيف ينشأ أساس قائم . لذا ، لا تبخس هذاالفصل حقه . يقدم الفصل الرابع المحددات وهي الصلة الرئيسية بين $Ax=b$ و $Ax = \lambda x$ . إنها تعطي معياراً لقابلية العكس ، الأمر الذي يظهر القيم الذاتية ويمثل آخر خطوة ضخمة من المقرر .

يقدم الفصل الخامس التقطير كمقدمة لشكل جوردان . تأخذنا القيم الذاتية والمتجهات الذاتية ، مباشرة ، من مصفوفة A إلى قواها $A^k$ . إنها تحل معادلات تتطور مع الزمن - مسائل ديناميكية - خلافاً للمسألة المتزنة $Ax=b$ . إنها تحمل معلومات

ليست ناتجة، بصورة واضحة، عن المصفوفة ذاتها - لمصفوفة ماركوف $\lambda_{max}=1$ في مصفوفة قائمة جميع القيم الذاتية $|\lambda| = 1$ ولمصفوفة متناظرة قيم ذاتية حقيقية. إذا امتد مقررك إلى بدء الفصل السادس، فإن الترابط بين القيم الذاتية والمحاور والمحددات للمصفوفات المتناظرة يجعل الموضوع متصلاً بدون انقطاع. (البند الأخير من كل فصل إختياري). يعطي، بعد ذلك الباب السابع عناية أكثر تركيزاً للجبر الخطي العددي الذي أصبح أساساً للحساب العملي. إنني أعتقد أن نظرة وجيزة للفصل الثامن، رغم كونها جديرة بالاهتمام، تعتبر مقدمة ملطفة للبرمجة الخطية. صفي سعيد لأن هذا الموضوع يأتي في النهاية ولا يدخل في الإمتحان.

أحب أن أذكر كتاب المعلم وكتاباً آخر. يحوي كتاب المعلم حلول جميع التمارين (بما في ذلك تمارين المراجعة الواردة في نهاية الأبواب من الأول إلى الخامس، بالإضافة الى أفكار و اقتراحات تتعلق بالجبر الخطي التطبيقي. آمل أن يطلب المعلمون نسخاً من الناشر:

(HBJ College Departement, 7555 Caldwell Avenue, Chicago,Illinios 60648).

وآمل، أيضاً، من قارئ هذا الكتاب أن يسعى مباشرة إلى الكتاب الثاني وهو الذي يدعى Introduction to Applied Mathematics إنه يركب الجبر الخطي مع المعادلات التفاضلية بنص واحد في الرياضيات التطبيقية المعاصرة والرياضيات الهندسية. إنه يحوي تحليل فورييه، متغيرات مركبة، معادلات تفاضلية جزئية، طرائق عددية و(حسابات مثالية) - إلا أن نقطة الانطلاق هي الجبر الخطي. لقد نشر من قبل:

Wellesley - Cambridge Press (P.O.Box 157, Wellesly, MA. 02181)

وكانت الإستجابة إليه هائلة. لقد أراد كثير من الأقسام تجديد هذا المقرر لتدريس ماهو أشد حاجة.

إن هذا الكتاب، مثل سابقه، يسعى للتعرف على ما يقدر الحاسوب على عمله (دون أن يكون مسيطراً عليه). إن حل مسألة لا يعني، أبداً، كتابتها بصورة سلسلة لا نهائية أو إيجادقانون مثل قانون كرامر، ولكنه يعني إيجاد خوارزمية فاعلة. يحتاج

ذلك إلى أفكار جيدة. يبقى الجبر واضحاً وبسيطاً وثابتاً. في الحذف، كان لعملية التعداد، في الفصل الاول، غرض ثان أيضاً – هو دعم إدراك مفصل لحالة nxn بتعداد فعلي للخطوات. لكني لا أعمل كل شئ في الصف. على النص أن يتمم ويلخص المحاضرات.

بصورة مختصرة نحتاج للكتاب لكي تدرس التطبيقات بصورة متتابعة مختلطة مع الريا ضيات الأساسية. هذا هو الكتاب الذي حاولت كتابته.

في النهاية، فإن هذه فرصة خاصة لشكركم. إنني معترف جداً بالجميل للقراء الذين أحبوا هذا الكتاب وتعرفوا على محتواه. كثيرون أولئك الذين كتبوا لي أفكاراً و تشجيعات وإنني أكتفي بذكر خمسة أسماء فقط :

Dan Drucker, Vince Giambalvo,stave kleiman, Bresford Parlett and Jim Simmonds.خلف أولئك حشد كبير من الأصدقاء والنقاد الذين أفتخر بهم.

لقد ظهرت هذه الطبعة بصورة أفضل مما تعلمه الطلاب والمؤلف. إن من البهجة الكبرى العمل مع Sophia Koulouras التي نضدت المخطوطة و Michael Michaud الذي حدد شكل الكتاب وجلده. فوق كل ذلك، أقدم شكري لزوجتي وأولادي ووالدي. فهذا الكتاب لهم أيضاً. هل يمكنني أخيراً أن أهدي هذا الكتاب إلى أمي وأبي اللذين قدما الكثير من أجله : شكراً لكما معاً.

**جلبرت سترانغ**

**Gilbert Strang**