بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

في

نظرية الأعداد

تأليــف

الدكتور معروف عبدالرحمن سمحان **الدكتور فوزى أحمد الذكـــــــير**

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم

جامعة الملك سعود

إصدار: النشر والمطابع ـ جامعة الملك سعود

ص.ب ٢٤٥٤ ـ الرياض ١١٤٥١ ـ المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

الذكير، فوزي أحمد

مقدمة في نظرية الأعداد / فوزي أحمد الذكير، معروف عبدالرحمن سمحان.

الرياض

٢٤٤ ص، ١٧سم x ٢٤ سم

ردمك ٣ ـ ٠٥ ـ ٩٩٦٠ (جلد)

١ ـ ٣٢٦ ـ ٠٥ ـ ٩٩٦٠ (غلاف)

١ ـ نظرية الأعداد أ ـ سمحان، معروف عبدالرحمن (م. مشارك)

ب ـ العنوان

ديوي ٥١١,٠٩ ١٦/٢٨٢٨

رقم الإيداع ١٦/٢٨٢٨

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس على نشره في اجتماعه الرابع والعشرين للعام الدراسي ١٤١٣/١٤١٤هـ الذي عُقد بتاريخ ٧/١/١٤١٤هـ الموافق ٢٧/٦/١٩٩٣م.

طبع بمطابع جامعة الملك سعود

المقدمة

هذا الكتاب هو مقدمة يسيرة لأساسيّات نظرية الأعداد التي تُعنى بدراسة الأعداد الصحيحة وخواصها. إن اهتمام الإنسان بدراسة الأعداد يرجع إلى أقدم العصور وتشهد الآثار التي عُثر عليها على ماقام به البابليون وقدماء المصريين والهنود والصينيون في هذا المضمار. كما ساهم الإغريق في إثراء هذا العلم منذ إنشاء مدرسة فيثاغورس قبل ٢٥٠٠ عام. ومن أكبر إنجازاتهم ما قدّمه إقليدس الذي عاش في القرن الرابع قبل الميلاد، إذ كان أول من برهن على وجود عدد غير منته من الأوليات كما قدم طريقة حسابية لإيجاد القاسم المشترك الأعظم لعددين بالإضافة إلى نتائج أخرى ذكرها في كتبه الثلاثة عشر في الرياضيات (العناصر). وبعد الإغريق جاء دور العرب والمسلمين في تطوير المعرفة الإنسانية بالأعداد، ويبدو هذا جليًا من خلال بعض المصطلحات التي مازالت تستخدم إلى يومنا هذا، فكلمة (Algorithm) والتي تعني طريقة الحساب هي تحريف لكلمة خوارزم أو بالأحرى الخوارزمي وهو العالم الرياضي المعروف أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي (Alkwarezmi) الذي عاش في القرن الثالث الهجري. ولقد كان كتابه «الجبر والمقابلة» من أفضل كتب الرياضيات المؤلفة في ذلك العصر.

إن النظام العشري للأعداد الذي نستخدمه في عصرنا الحاضر هو نظام طوّره العرب والمسلمون بعد أن ابتدعه الهنود ولا يزال الغربيون يشيرون إلى رموز الأرقام العشرية 9 ,8 ,... ,4 ,3 ,2 ,1 بالأرقام العربية (arabic numerals). ومن العلماء العرب الذين أثروا المعرفة الإنسانية في مجال الأعداد العالم ثابت بن قرة الحراني الذي عاش في القرن الثالث الهجري من خلال دراسته للأعداد التامة وحصوله على

صيغة لإيجاد أزواج من الأعداد المتحابة. ونذكر من العلماء أيضًا العالم الكرخي (الكرجي) صاحب كتاب «البديع في الحساب» وغياث الدين الكاشي الذي ألّف كتاب « مفتاح الحساب » وشرح فيه طريقة التمثيل العشري كما قرَّب قيمة ٢ط (ضعف النسبة الثابتة) إلى ١٦ رقمًا عشريًا. كذلك العالم نصير الدين الطوسي مؤلف كتاب «جوامع الحساب» بالإضافة إلى العديد من العلماء الذين نقلوا وترجموا عن الإغريق ثم أضافوا نتاجهم الذي يمكن أن نلمس آثارها إلى وقتنا الحاضر.

إنّ قدم علم الأعداد لا يعني أنه علم جامد لا يواكب العصر، بل إن التقنيات الحديثة وخاصة الحاسوب أبرزت أهمية هذا العلم وتفاعلت معه. فالتقدم الهائل في علم الحاسوب (computer science) يبرز أهمية تعلم خواص الأعداد ودراستها. ومن ناحية أخرى ساهمت الحواسب السريعة(super computers) في تقدم نظرية الأعداد من خلال التعرف على بعض خواصها وصياغة بعض الأحداس (conjectures). كذلك برزت أهمية دراسة الأعداد في علم التعمية (cryptology)وموضوع أمن المعلومات (data security).

في الختام نرجو أن نكون قد وفقنا في تقديم كتاب مفيد للطالب المبتدىء في دراسة نظرية الأعداد والله من وراء القصد.

المؤلفان

المحتويات

صفحة

صفحة

تمهيد

قبل البدء في فصول هذا الكتاب سنتطرق إلى بعض المفاهيم والحقائق الأساسية التي سنحتاج إليها في برهان بعض المبرهنات .

الاستقراء الرياضي

Mathematical Induction

الاستقراء الرياضي وسيلة سهلة فعّالة لبرهان كثير من المبرهنات حول الأعداد الصحيحة غير السالبة . وسندرس هنا صيغتين متكافئتين لمبدأ الاستقراء الرياضي .

المبدأ الأول للاستقراء الرياضي

The first principle of mathematical induction

لنفرض أنّ $P(n)$ عبارة ما ، تعتمد على العدد الصحيح غيرَ السالب n ولنفرض أن q عدد صحيح غير سالب معطى . لبرهان أن $P(n)$ عبارة صحيحة لكل $n \geq q$ ، يكفي أن نثبت مايلي :

(١) $P(q)$ عبارة صحيحة .

(٢) إذا كان $k \geq q$ وكانت $P(k)$ عبارة صحيحة فإن $P(k+1)$ عبارة صحيحة .

الخاصيّة (١) أعلاه تعرف عادة بالخطوة الأساسيّة والخاصيّة (٢) تعرف بخطوة الاستقراء، أما الفرضية في الخاصية (٢) فإنها تسمى بفرضية الاستقراء.

من المهم جداً أن نفهم مبدأ الاستقراء الرياضي بصورة صحيحة، فالخطوة الأساسية تبرهن لنا على صحة العبارة $P(q)$، وبتطبيق خطوة الاستقراء عندما $k = q$ نحصل على صحة العبارة $P(q+1)$، نستطيع الآن أن نطبق خطوة الاستقراء مرة أخرى لنحصل على صحة العبارة $P(q+2)$ وهلم جرا. نحذّر القارىء هنا من أن خطوة الاستقراء لا تفترض صحة المبرهنة المطلوب برهانها، ولكننا في الحقيقة نريد أن نبرهن على صحة عدد غير منته من الحالات وخطوة الاستقراء تسمح لنا بأن نستخدم الحالة المعينة التي تمّ برهانها لبرهان الحالة التي تليها.

مثال (١)

أثبت أن $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل $n \geq 1$.

الحل

لنفرض أن العبارة $P(n)$ هي $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

الخطوة الأساسية

بما أن $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ فإن $P(1)$ عبارة صحيحة.

خطوة الاستقراء

لنفرض أن $P(k)$ عبارة صحيحة، أي أن

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

باستخدام فرضية الاستقراء نحصل على المساواة:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

ولكن $$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ومنه نستنج أن $P(k+1)$ عبارة صحيحة .

مثال (٢)

أثبت أن $2^n < n!$ لكل $n \geq 4$.

الحل

لنفرض أن $P(n)$ هي العبارة :

$$2^n < n!$$

الخطوة الأساسية

بما أن $4! = 24 > 2^4 = 16$ فإن $P(4)$ عبارة صحيحة .

خطوة الاستقراء

لنفرض أن $P(k)$ عبارة صحيحة ، $k \geq 4$. أي أن $2^k < k!$ عبارة صحيحة .

باستخدام فرضية الاستقراء نحصل على المتباينة :

$$2^{k+1} = 22^k < 2(k!) < (k+1)(k!) = (k+1)!$$

ومنه نجد أن $P(k+1)$ عبارة صحيحة .

في بعض الأحيان قد نحتاج إلى استخدام مبدأ الاستقراء الرياضي بصياغة تختلف عما أوردناه ، لكنها مكافئة لها ويشار إليها بالمبدأ الثاني للاستقراء الرياضي .

المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي
The second principle of mathematical induction

لنفرض أن $P(n)$ عبارة ما تعتمد على العدد الصحيح غير السالب n ولنفرض أن q عدد صحيح غير سالب معطى . لبرهان أن $P(n)$ عبارة صحيحة لكل $n \geq q$ يكفي أن نثبت مايلي :

(١) $P(q)$ عبارة صحيحة .

(٢) إذا كان $k \geq q$ وكانت $P(q), P(q+1), \ldots, P(k)$ جميعها عبارات صحيحة فإن $P(k+1)$ عبارة صحيحة .

مثال (٣)

تعرف متتالية فيبوناشي (Fibonacci sequence) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ كالتالي :

$f_1 = f_2 = 1$ و $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ لكل $n \geq 3$. برهن أن :

$f_n \leq [(1+\sqrt{5})/2]^n$ لكل $n \geq 1$.

الحل

لنفرض أن $P(n)$ هي العبارة : $f_n \leq [(1+\sqrt{5})/2]^n$.

الخطوة الأساسية

بما أن $f_1 = 1 \leq [(1+\sqrt{5})/2]^1$ وأن $f_2 = 1 \leq [(1+\sqrt{5})/2]^2$

فإن العبارتين $P(1)$ و $P(2)$ صحيحتان .

خطوة الاستقراء

لنفرض أن $f_m \leq [(1+\sqrt{5})/2]^m$ لكل $1 \leq m \leq k$.

من تعريف متتالية فيبوناشي لدينا : $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ ، ومن فرضية الاستقراء لكل من f_k و f_{k-1} لدينا :

$$\begin{aligned} f_{k+1} &\leq [(1+\sqrt{5})/2]^k + [(1+\sqrt{5})/2]^{k-1} \\ &= [(1+\sqrt{5})/2]^{k-1} [((1+\sqrt{5})/2)+1] \end{aligned}$$

ولكن $((1+\sqrt{5})/2)+1 = [(1+\sqrt{5})/2]^2$. ومنه نجد أن :

$f_{k+1} \leq [(1+\sqrt{5})/2]^{k+1}$ أي أن العبارة $P(k+1)$ صحيحة .

سنتطرق إلى دراسة متتالية فيبوناشي بالتفصيل في الملحق الأول من هذا الكتاب .

مثال (٤)

لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية معرّفة كالتالي :

$a_0 = 1$ ، $a_1 = 2$ و $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ لكل $n \geq 2$.

برهن أن $a_n = 2^n$ لكل $n \geq 0$.

الحل

لنفرض أن $P(n)$ هي العبارة : $a_n = 2^n$.

الخطوة الأساسية

بما أن $a_0 = 1 = 2^0$ وأن $a_1 = 2 = 2^1$ فـــإن العـــبـــارتين $P(1)$ و $P(2)$ صحيحتان .

خطوة الاستقراء

لنفـــرض أن $P(m)$ صـــحـــيـــحـــة لكل $0 \leq m \leq k$. أي أن $a_m = 2^m$ لكل $0 \leq m \leq k$.

من تعريف المتتالية $\{a_n\}$ لدينا :

$$a_{k+1} = 4a_k - 4a_{k-1}$$

ومن فرضية الاستقراء لكل من a_k و a_{k-1} لدينا :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k - 4a_{k-1} \\ &= 4(2^k) - 4(2^{k-1}) \\ &= 2^{k+2} - 2^{k+1} \\ &= 2^{k+1}(2-1) \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

إذن العبارة $P(k+1)$ صحيحة .

هناك مبدأ آخر مكافىء لمبدأ الاستقراء الرياضي يعرف بمبدأ الترتيب الحسن ونقبله كمسلمة دون برهان.

مبدأ الترتيب الحسن Well - ordering principle

إذا كانت S مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة غير السالبة فإنه يوجد عنصر أصغر (smallest element) في S. أي يوجد عنصر $s_0 \in S$ بحيث $s_0 \leq s$ لكل $s \in S$. من الواضح أن مثل هذا العنصر s_0 يجب أن يكون وحيداً.

والمبرهنةالتالية تنص على أن مبدأ الترتيب الحسن ومبدأ الاستقراء الرياضي متكافئان وسنذكرها دون برهان.

مبرهنة

العبارات التالية جميعها متكافئة :

(١) المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي .

(٢) المبدأ الأول للاستقراء الرياضي .

(٣) مبدأ الترتيب الحسن . Δ

سننهي هذه المقدمة بمبرهنة تعرف بمبرهنة ذي الحدين والتي سيكون لها بعض الاستخدامات في هذا الكتاب علاوة على أن برهانها هو مثال جيد على استخدام طريقة الاستقراء الرياضي كإحدى طرائق البرهان. وقبل إعطاء المبرهنة نورد التعريف التالي :

تعريف

ليكن k و m عددين صحيحين بحيث $m \geq k \geq 0$. نعرف معامل ذي الحدين $\binom{m}{k}$ بأنه

$$\binom{m}{k} = \frac{m\,!}{k\,!\,(\,m - k\,)\,!}.$$

مبرهنة ذى الحدين (The binomial theorem)

إذا كان x ، y متغيرين وكان $n \geq 1$ عددًا صحيحًا فإن

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$$

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي . لنفرض أن العبارة P (n) هي :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$$

الخطوة الأساسية

بما أن

$$(x + y)^1 = \binom{1}{0} x^1\, y^0 + \binom{1}{1} x^0\, y^1 = x + y$$

فإن العبارة P (1) صحيحة .

خطوة الاستقراء

لنفرض أن العبارة P (n) صحيحة ، أي أن

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$$

نعلم أن

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)^n (x + y) = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k)(x + y)$$

كذلك

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^{k}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^{k}$$

و أن

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}+y^{n+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^{k}+y^{n+1}$$

إذن

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^{k}+y^{n+1}$$

ولكن

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$ (تحقق من ذلك)

لذا نحصل على

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^{k}+y^{n+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^{k}$$

أي أن العبارة $P(n+1)$ صحيحة . Δ

تمـــــاريـــــن

استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات صحة كل من العبارات التالية في التمارين من ١ إلى ١٩ :

(١) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(٢) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(٣) $$\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

(٤) $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

(٥) $$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^3 = n(2n^3+8n^2+11n+6)$$

(٦) $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(٧) $$\sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}$$

(٨) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

(٩) $2^n < n!$ لكل $n \geq 4$

(١٠) $n! > n^2$ لكل $n \geq 4$

(١١) لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ المتتالية المعرفة كالتالي :

$a_0 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ لكل $n \geq 0$

أثبت أن $a_n = 2^{-n}$ لكل $n \geq 0$.

(١٢) لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ المتتالية المعرفة كالتالي :

$a_0 = 1$ و $a_{n+1} = 2(n+1)\, a_n$ لكل $n \geq 1$

أثبت أن $a_n = 2^n \times n!$ لكل $n \geq 0$.

(١٣) لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ المتتالية المعرفة كالتالي :

$a_0=1$ و $a_{n+1} = a_n + 2^{n+1}$ لكل $n \geq 0$

أثبت أن $a_n = 2^{n+1} - 1$ لكل $n \geq 0$.

(١٤) لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ المتتالية المعرفة كالتالي :

$a_0=1$ ، $a_1=3$ و $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ لكل $n \geq 1$

أثبت أن $a_n = 2^n + n \times 2^{n-1}$ لكل $n \geq 0$.

(١٥) لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ المتتالية المعرفة كالتالي :

$a_0 = 0$ ، $a_1 = 4$ و $a_{n+1} = -2a_n + 3a_{n-1}$ لكل $n \geq 1$

أثبت أن $a_n = 1 - (-3)^n$ لكل $n \geq 0$.

(١٦) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ المتتالية المعرفة كالتالي :

$a_1 = 1$ ، $a_2 = 2$ و $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ لكل $n \geq 2$

أثبت أن $a_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n$ لكل $n \geq 1$.

(١٧) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ المتتالية المعرفة كالتالي :

$a_1 = 1$ ، $a_2 = 5$ و $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ لكل $n \geq 2$

أثبت أن $3^n \leq a_{n+1} \leq 2 \times 3^n$ لكل $n \geq 1$.

(١٨) لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ المتتالية المعرفة كالتالي :

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$ و $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + a_{n-1}$ لكل $n \geq 2$

أثبت أن

(أ) $2a_n \leq a_{n+2}$ لكل $n \geq 2$.

(ب) $a_{n+2} \geq (\sqrt{2})^n$ لكل $n \geq 2$.

(١٩) إذا كان $x \in R$ ، $x > -1$

فأثبت أن

$(1 + x)^n \geq 1 + n\,x$ لكل عدد صحيح موجب n .

(٢٠) استخدم مبدأ الترتيب الحسن للبرهان على مايلي :

(ا) إذا كانت S مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة المحدودة من الأسفل . أي $x \geq M$ لكل $x \in S$ حيث M عدد صحيح ، فلابد من وجود عنصر أصغر في S .

(ب) إذا كانت S مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة المحدودة من الأعلى ، أي يوجد عدد صحيح M بحيث $x \leq M$ لكل $x \in S$ ، فلابد من وجود عنصر أكبر في S .