



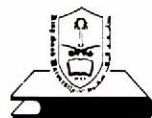
مبادئ التحليل الحقيقي

الجزء الأول

تأليف

د. محمد بن عبد الرحمن القويز د. صالح عبد الله السنوسي
د. محمود أحمد عطوة

قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة الملك سعود



النشر و المطبع - جامعة الملك سعود

ص.ب.: ٢٤٥٤ - الرياض ١١٤٥١ - المملكة العربية السعودية

ح جامعة الملك سعود ، ١٤١٨ هـ (١٩٩٧ م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

القويز ، محمد بن عبدالرحمن

مبادئ التحليل الحقيقي / محمد بن عبدالرحمن القويز ، صالح
عبدالله السنوسي ، محمد أحمد عطوة - الرياض .

٣٢٧ ص ؛ ١٧ سم × ٢٤ سم

ردمك ٤-٦٣٨-٠٥-٩٩٦٠ (مجموعة)

٦-٦٢٣-٠٥-٩٩٦٠ (جلد ج ١)

٤-٦٢٤-٠٥-٩٩٦٠ (غلاف ج ١)

١- التحليل الرياضي أ - السنوسي ، صالح عبدالله (م . مشارك)

ب- عطوة ، محمود أحمد (م . مشارك) ج- العنوان

١٨/١٦٣٥

ديوي ٥١٥

رقم الإيداع : ١٨/١٦٣٥

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة ، وقد وافق
المجلس على نشره في اجتماعه السادس للعام الدراسي ١٤١٥/١٤١٦ هـ
المعقود بتاريخ ١٠/٦/١٤١٥ هـ الموافق ١٣/١١/١٩٩٤ م

مطابع جامعة الملك سعود ١٤١٨ هـ



مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبيه الكريم، وبعد . . .
يعني هذا الكتاب بمبادئ التحليل الحقيقي في \mathbb{R} ، وقد وضع لتغطية مقرر التحليل الحقيقي الأول كما يقدم لطلاب وطالبات السنة الثانية بقسم الرياضيات بجامعة الملك سعود. فهو من هذه الزاوية يعالج خواص الأعداد الحقيقية ودالة المتغير الحقيقي بشيء من التأنى والتجريد بهدف وضع مفهومي الاتصال وقابلية الاشتقاق على أرضية أكثر صلابة مما اعتاد عليه الطالب في مقرر التفاضل. ومن خلال ذلك نأمل أن يتعرف الطالب على مرتكزات التحليل الحقيقي وأساليبه في أبسط صورها، أي في المجموعة \mathbb{R} ، وأن يستوعبها بالدرجة التي تسمح له بالانطلاق فيما بعد إلى فضاءات أوسع وأعم من \mathbb{R} .

نقدم في الباب الأول بعض المفاهيم الأساسية من المنطق الرياضي ونظرية المجموعات بقدر ما يلزم لصياغة مفاهيم التحليل ونظرياته بشيء من الاختزال والدقة. ثم نركز في الباب الثاني على الأعداد الحقيقية فنعرّفها بالاستناد إلى مسلماتها الجبرية (خواص الحقل والترتيب) والتحليلية (خاصة التمام)، ونقدم مجموعاتها الجزئية المعروفة، وهي الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية، باعتبارها تحقق شروطاً إضافية. ثم نختم الباب الثاني بنبذة مختصرة عن قابلية العد.

يكتسب الباب الثالث أهميته من ناحيتين : فهو من جهة يعالج المتتاليات الحقيقية ونظريات التقارب كنموذج على درجة من الأهمية في حد ذاته حيث أنه يبرز الخواص الأساسية للأعداد الحقيقية ، ومن جهة أخرى فهو يشكل مدخلاً مناسباً لمفهوم نهاية الدالة ، وذلك من خلال نظرية (٤ - ١) . وكما هو معلوم فإن نهاية الدالة من أهم مرتكزات التحليل الحقيقي ، وهي موضوع الباب الرابع ، وفيه نقدم النظريات الأساسية إما بالاستناد إلى تعريف نهاية الدالة أو بالرجوع إلى خواص المتتاليات .

يعنى الباب الخامس بالاتصال ونظرياته ، وبصفة خاصة الاتصال على فترة . وينتهي بالحديث عن المجموعة المتراسة ونظرية هايني - بوريل . وفي الباب السادس نقدم الاشتقاق وما يتعلق به من نظريات (القيمة المتوسطة ، قاعدة لوبيتال ، مفكوك تيلور) .

لقد وُضع هذا الكتاب كمدخل للتحليل الحقيقي ليغطي خلال فصل دراسي واحد ، لكن الرغبة في اكتمال المادة قد أملت علينا التطرق لجوانب من الموضوع ليست في صميم التحليل ، ويفترض أنها قدّمت إلى الطالب بصورة أو بأخرى في مقررات سابقة ، مثل مفاهيم الباب الأول والبنود الثلاثة الأولى من الباب الثاني . وبإمكان المدرس أن يمر على هذه المواضيع مرور الكرام إذا شعر بضيق الوقت .

من جهة أخرى سوف يلاحظ المدرس أن بعض نظريات البندين ٥ - ٣ ، ٥ - ٤ قد أعيدت صياغتها وبراهينها باستخدام مفهوم التراص في البند ٥ - ٥ ، مثل نظرية ٥ - ١٤ التي تكافئ نظرية ٥ - ١٠ ، أو النتيجة ٥ - ١٥ - ١ التي تعمم نظرية ٥ - ٥ . لقد شعرنا أن هذه الإزدواجية لها ما يبررها من حيث إن أسلوب المتتاليات يظل أقرب إلى فهم طالب السنة الثانية من الاعتماد على خواص التراص ونظرية هايني - بوريل . هذا من ناحية ، ومن ناحية أخرى فإن إثبات النتيجة الواحدة بطريقتين تكون أحياناً تدريباً مفيداً يبرز الفكرة الأساسية ويوضح مزايا أسلوب على آخر ، كما يعود الطالب على اختيار الأسلوب الأنسب للوصول إلى الهدف المنشود .

إن فهم مادة هذا الكتاب لا تتيسر بمجرد قراءته، إذ ينبغي أن يتدرب الطالب على حل التمارين في نهاية كل بند، لا سيما وأن في بعض هذه التمارين مادة مكتملة لما في الكتاب. ولقناعتنا بأهمية التمارين ودورها في ترسيخ المادة في ذهن الطالب، فقد أعدنا حلولاً مختزلة وإرشادات لكثير منها، نأمل أن يجد فيها الطالب ما يساعده، بعد بذل المحاولات المستقلة، على إكمال الحلول.

لقد اخترنا المصطلحات العربية للمفاهيم الرياضية المستخدمة بعد الرجوع إلى المعتمد منها من قبل الأسرة الوطنية للرياضيات بالمملكة العربية السعودية وبعض مؤتمرات التعريب. فإذا وجد فيها بعض المختصين خروجاً عن المؤلف بالنسبة لهم فإننا نأمل ألا يكون ذلك عائقاً دون تقبل الكتاب، ويسعدنا أن نتلقى جميع ملاحظاتهم في هذا الخصوص.

نسأل الله أن ينفع بهذا الجهد المتواضع طلاب العلم في منطقتنا العربية، ونشكر كل من ساهم من زملائنا وطلابنا في تقويمه، كما نشكر جامعة الملك سعود لإسهامها في تحكيم الكتاب وطباعته. والله من وراء القصد وهو الهادي إلى سواء السبيل.

المؤلفون

المحتويات

صفحة

هـ	مقدمة
ط	المحتويات

الباب الأول : بعض المفاهيم الأساسية

١	١-١ بعض مصطلحات المنطق
٧	تمارين ١-١
٩	٢-١ المجموعات
١٤	تمارين ٢-١
١٥	٣-١ الدوال
٣٠	تمارين ٣-١

الباب الثاني : الأعداد الحقيقية

٣٤	١-٢ مسلّمات الحقل
٣٨	تمارين ١-٢

صفحة

٣٩	٢-٢	مسلمات الترتيب
٤٥	٢-٢	تمارين
٤٨	٣-٢	الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية
٥٧	٣-٢	تمارين
٥٩	٤-٢	مسلمة التمام
٧٥	٤-٢	تمارين
٧٨	٥-٢	المجموعات القابلة للعد
٨٧	٥-٢	تمارين

الباب الثالث : المتتاليات

٨٩	١-٣	المتتاليات والتقارب
٩٨	١-٣	تمارين
١٠٠	٢-٣	الخواص الأساسية للمتتاليات المتقاربة
١١٠	٢-٣	تمارين
١١٣	٣-٣	المتتاليات المطردة
١٢٠	٣-٣	تمارين
١٢٢	٤-٣	معيار كوشي ونظرية بولزانو-فايرشتراس
١٣٥	٤-٣	تمارين
١٣٦	٥-٣	المتتاليات الجزئية
١٤٠	٥-٣	تمارين

صفحة

١٤١ المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة	٦-٣
١٤٩	تمارين ٦-٣

الباب الرابع : نهايات الدوال

١٥٣ نهاية الدالة	١-٤
١٦٥	تمارين ١-٤
١٦٧	النظريات الأساسية ٢-٤
١٧٤	تمارين ٢-٤
١٧٦	بعض الامتدادات لتعريف نهاية الدالة ٣-٤
١٨١	تمارين ٣-٤
١٨٣	الدوال المطردة ٤-٤
١٨٨	تمارين ٤-٤

الباب الخامس : الاتصال

١٨٩	الدوال المتصلة ١-٥
٢٠٠	تمارين ١-٥
٢٠٣	تركيب الدوال المتصلة ٢-٥
٢٠٨	تمارين ٢-٥
٢١٠	خواص الاتصال على فترة ٣-٥
٢٢٥	تمارين ٣-٥
٢٢٧	الاتصال المنتظم ٤-٥
٢٣٦	تمارين ٤-٥

صفحة

٢٣٨	المجموعات المتراسة والاتصال	٥-٥
٢٥٢	تمارين ٥-٥	

الباب السادس : التفاضل

٢٥٦	المشتقة وقوانين الاشتقاق	١-٦
٢٧٣	تمارين ١-٦	
٢٧٦	نظرية القيمة المتوسطة	٢-٦
٢٩١	تمارين ٢-٦	
٢٩٥	قاعدة لوبيتال	٣-٦
٣٠٧	تمارين ٣-٦	
٣٠٩	نظرية تيلور	٤-٦
٣١٩	تمارين ٤-٦	
٣٢١	المراجع	
٣٢٣	كشاف وثبت الموضوعات	