







# نظرية الحلقات وامتداد الحقول

تأليف

**يوسف عبدالله الخميس**

قسم الرياضيات، جامعة الملك سعود

النشر و المطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب. : ٢٤٥٤ - الرياض ١١٤٥١ - المملكة العربية السعودية



ح) جامعة الملك سعود، ١٤١٩ هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية  
٥١٢,٤ الخميس، يوسف عبدالله.  
٦١٧ خ نظرية الحلقات وامتداد الحقول / تأليف يوسف عبدالله الخميس . -  
ط ١. - الرياض: النشر العلمي والمطابع، جامعة الملك سعود،  
١٤١٩ هـ / ١٩٩٨ م.  
١٦٦ ص؛ ٢٤×١٧ سم.  
ردمك ٩-٠٥٩-٠٥-٩٩٦٠ (جلد)  
٠-٠٥٨-٩٩٦٠ (غلاف)  
١- الجبر. ٢- الرياضيات. أ- العنوان.

رقم الإيداع: ١٤/١٤١٩

تم تحكيم الكتاب بواسطة لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس بنشره في اجتماعه السابع للعام الدراسي ١٤١٢ / ١٤١٣ هـ المعقود بتاريخ ٢٥ / ٦ / ١٤١٢ هـ الموافق ٣١ / ١٢ / ١٩٩١ م.

مطابع جامعة الملك سعود ١٤١٩ هـ



## تقديم

لقد جاءت فكرة هذا الكتاب من خلال تدريس مقرر الحلقات والحقول للمستوى الرابع في جامعة الملك سعود ومن خلال هذه التجربة فقد روعي فيه الأخذ بالمواءمة بين قضيتين مهمتين:

**الأولى** وهي التعمق بعض الشيء بإطلاع القارئ على البنى الرياضية التي يتميز بها الجبر، مدعمة بحوالي مائة وعشرين تمريناً تستحث ملكة البرهان لديه وتوسع أساسه الجبري، والأخرى وهي محاولة تجنب الخطر الذي تتعرض له الأفكار المجردة في المعالجة المباشرة والمفاجئة، وذلك عن طريق توسيع قاعدة الأمثلة المعطاة والتي ربما عددها عن ثمانين مثلاً، كما روعي عند معالجة كل موضوع توضيح أهميته في مقدمة كل فصل مع إعطاء مبررات تربط محتواه بأمثلة ملموسة أو بحوثات تاريخية أو رياضية. لقد شمل الكتاب على أربعة فصول تغطي مادة المقرر ٣٤٤ ريض (الحلقات والحقول) وقد عرضت مادة هذا الكتاب بطريقة تبرز الترابط بين كل فصل والفصول التي تليه. سيلاحظ القارئ في الفصل الأول أن كثيراً من المفاهيم الواردة عن الحلقات هي تعميم للمفاهيم نفسها في الزمر المثاليات في الحلقات تقوم بالدور نفسه الذي تقوم به الزمر الجزئية الناظرية في الزمر كما تؤدي المثاليات إلى بناء حلقة القسمة التي هي تعميم لفكرة زمرة القسمة. سيعمم الهومومورفزم الذي سبق أن عرض له القارئ في الزمر إلى الحلقات كما أن نظريات التشاكل في الحلقات هي تعميم لمثيلاتها في الزمر. يغطي الفصل الثاني حقل القواسم حلقة تامة ويميز الحلقة والمجموع المباشر للحلقات

والحلقيّات، أما الفصل الثالث فيغطي الحلقات الإقليدية وحلقة كثيرات الحدود، والفصل الأخير يتعرض لامتداد الحقول وحقول الانشطار والحقول المنتهية .  
لقد اعتمد الكتاب في مصطلحاته على ما اتّفق عليه مكتب تنسيق التعريب بالرباط التابع للمنظمة العربية للثقافة والتربية والعلوم ، إضافةً إلى قاموس الرياضيات الذي أصدرته مشكورة مؤسسة الكويت للتقدم العلمي .  
استكمالاً للجهد العلمي فقد دُوِّب الكتاب بدليل لمصطلحاته العلمية ورموزه وقائمة بالمراجع المستخدمة أو المراجع التي قد يحتاجها القارئ الذي يرغب في الاستزادة، ونستميح القارئ عذراً إذا صادف بعض الهنّات والأخطاء المطبعية .  
هذا ولا يفوتني أن أوجه الشكر إلى جامعة الملك سعود على تشجيعها نشر الكتب العلمية . وختاماً نرجو من الله العليّ القدير أن ينفع القارئ بهذا المطبوع ويحسن القصد والعاقبة وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين .

المؤلف

## المحتويات

صفحة	
هـ	تقديم
ز	المحتويات
ك	الرموز المستخدمة في الكتاب
	الفصل الأول: الحلقات
١	مقدمة
٢	الحلقة وزمرة وحداتها، تعاريف وأمثلة
١٠	الحقول
١٦	تمارين (١ - ١)
١٩	المثاليات وحلقة القسمة
١٩	أولاً: المثاليّات
٢١	ثانياً: حلقة القسمة
٢٢	الهومومورفيزم في الحلقات
٣١	تمارين (١ - ٢)
٣٤	الحلقة الرئيسة
٣٥	بعض العمليات على المثاليّات
٣٧	المثاليّات الأولى والأعظميّة
٤٥	تمارين (١ - ٣)

## صفحة

## الفصل الثاني : بناء حلقات جديدة وحلقات

٤٧	.....	مقدمة
٤٨	.....	حقل القواسم : بناء حقل القواسم لحلقة تامة
٥٣	.....	مميز الحلقة
٥٥	.....	المجموع المباشر للحلقات
٥٨	.....	تمارين (٢ - ١)
٦١	.....	الحلقات والحلقات الجزئية
٦٢	.....	حلقة القسمة وهمومورفزم الحلقات
٦٨	.....	تمارين (٢ - ٢)

## الفصل الثالث : الحلقات الإقليدية وحلقة كثيرات الحدود

٧١	.....	مقدمة
٧١	.....	الحلقات الإقليدية
٧٨	.....	نظرية التحليل الوحيد
٨٠	.....	تمارين (٣ - ١)
٨١	.....	حلقة كثيرات الحدود : بناء حلقة كثيرات الحدود
٨٨	.....	حلقة كثيرات الحدود على حقل
٩٢	.....	جذور كثيرات الحدود على حقل
٩٦	.....	حلقة كثيرات الحدود على حقل الأعداد النسبية
٩٩	.....	تمارين (٣ - ٢)

## الفصل الرابع : امتداد الحقول

١٠٣	.....	مقدمة
١٠٤	.....	الامتداد البسيط للحقول
١١٢	.....	الامتداد المنتهي للحقول



صفحة

١١٧	الإغلاق الجبري لحقل
١١٨	تمارين (٤ - ١)
١٢٠	حقول الانشطار
١٢٨	الحقول المنتهية
١٣٧	تمارين (٤ - ٢)
١٣٩	المراجع
	ثبت المصطلحات
١٤١	أولاً : عربي - إنجليزي
١٥٣	ثانياً : إنجليزي - عربي
١٦٣	كشاف الموضوعات



## الرموز

### المستخدمة في الكتاب

أصغر حقل يحوي الحقل الجزئي $F$ والعنصر $a$	$F(a)$
أصغر حلقة تحوي الحلقة الجزئية $R$ والعنصر $a$	$R[a]$
تساكل ذاتي محايد للحلقة $R$	$\text{id}_R$
تساكل على الحلقة $R$	$\cong_R$
حقل الأعداد المركبة	$\mathbb{C}$
حقل الأعداد الحقيقية	$\mathbb{R}$
حقل الأعداد النسبية	$\mathbb{Q}$
حلقة الاندومورفزمات للحلقة $M$ على الحلقة $R$	$\text{Hom}_R(M, M)$ أو $\text{End}_R M$
حلقة الاندومورفزمات للزمرة الإبدالية $M$	$\text{End } M$
حلقة الأعداد الصحيحة	$\mathbb{Z}$
حلقة الأعداد الصحيحة قياس $n$	$\mathbb{Z}_n$
حلقة القسمة للحلقة $R$ بالمثالي $I$	$R/I$
حلقة كثيرات الحدود على الحلقة $R$	$R[x]$
حلقة القسمة للحلقة $M$ على $N$	$M/N$
درجة كثيرة الحدود $f$	$\deg f$
زمرة التساكلات الذاتية للحلقة $R$	$\text{Aut } R$
زمرة التساكلات الذاتية الداخلية للحلقة $R$	$\text{Inn } R$
الزمرة الجمعية للحلقة $R$	$R^+$

الزمرة الخطية العامة من الدرجة $n$ على الحقل $F$	$GL_F(V)$ أو $GL_n(F)$
الزمرة الدائرية المولدة من قبل العنصر $a$	$\langle a \rangle$
زمرة الوحدات للحلقة $R$	$G_R$
مثالي مولد من قبل العنصر $a$	$(a)$
مجموع مباشر خارجي	$\sum_{Ex}^{\oplus}$
مجموع مباشر داخلي	$\sum^{\oplus}$
مجموعة العناصر غير الصفريّة في $R$	$R^*$
مميز الحلقة	$\text{char } R$